

Thème 2: Calcul littéral

2.1 Monômes et polynômes

Introduction : Une expression littérale est une suite de lettres et de nombres reliés entre eux par les symboles d'opérations mathématiques.

Exemples d'expressions littérales :

- $3x^8$ est un monôme, car il contient un terme;
- $2x + 3$ est un binôme (contient 2 termes);
- $3x^2 - 2x + 3$ est un trinôme (contient 3 termes).

Rappels : Pour effectuer un calcul littéral, on doit savoir enlever des parenthèses et effectuer des calculs avec la notation de puissances. Voici quelques rappels :

- *Dans l'exemple qui suit, la parenthèse précédée du signe « plus » est inutile :*

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d$$

gestion des parenthèses

- *La parenthèse précédée du signe « moins » peut être supprimée en changeant tous les signes :*

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

- *Lorsqu'une parenthèse est multipliée par un nombre, on utilise la distributivité :*

$$a \cdot (b + c - d) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$$

- *Pour multiplier deux parenthèses, on effectue une double distributivité :*

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

- *Ne pas effectuer de distributivité dans les cas suivants, la distributivité se fait toujours de la multiplication par rapport à l'addition :*

$$a \cdot (b \cdot c) \neq a \cdot b \cdot a \cdot c \quad \text{mais} \quad a \cdot (b \cdot c) =$$

- *On note souvent les multiplications entre des lettres sans utiliser le signe multiplicatif :*

$$ab = a \cdot b$$

Rappels : La notation des puissances à exposant entier naturel a la signification suivante :

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

gestion des puissances

On peut regrouper de façon intéressante les produits de puissances et les puissances de puissances :

$$a^3 \cdot a^2 = a^5$$

$$(a^3)^2 = a^6$$

Modèle 1 : Effectuer le produit en distribuant dans la parenthèse :

$$3a^2b(a + b^2c - 2) =$$

la distributivité

Modèle 2 : Éliminer les parenthèses de l'expression :

$$2x - [y - (x + 3y)] =$$

*l'élimination de
parenthèses*

Modèle 3 : Enlever les parenthèses et réduire les termes semblables :

$$(3x + 2y)(x^2 - 2) - x^2(x - y)$$

*l'élimination de
parenthèses*

Exercice 2.1: Effectuer les produits suivants :

a) $-2x^2y(4xy + 2x^2y - x + 2)$

b) $3a^2b(2a - 4b^2 + 7)$

Exercice 2.2: Éliminer les parenthèses des expressions suivantes puis réduire :

a) $2 - [4 + (2 - 3) - (5 + 6)]$ b) $7 + [3 - (6 - 1) - (5 + 6)]$

c) $x - [y + (x + y)]$ d) $x - [y - (x + y)]$

e) $2x - [3y + (x - 5y)]$ f) $2xy - [3xy + (7 - 5xy)]$

g) $-2(a + c) + 3[(b - c) + 3(c - a)]$

h) $3(a - 2c) - 2[(b - c) + 2(c - a) - a]$

Exercice 2.3: Enlever les parenthèses et réduire les termes semblables :

- a) $3a + 2 - [4a - (3 - 2a)] - 5$
 b) $4x - \{2x - [3y - (5x - 4y) + 3x]\} - 2y$
 c) $5m - [6n^2 + 2(m + n^2) - 3m]$
 d) $\{2[8c^3 - 2c(4c^2 - 12)] - 24c\} \cdot 3$

Exercice 2.4: Enlever les parenthèses et réduire les termes semblables :

- a) $(a + x)(b + y)$ b) $a + x \cdot (b + y)$
 c) $(a + x)b + y$ d) $(a - x)(b + y)$
 e) $a - x(b + y)$ f) $(a - x)(b - y)$
 g) $(a - x)b - y$ h) $(a \cdot x)(b - y)$

Exercice 2.5: Enlever les parenthèses et réduire les termes semblables :

- a) $x^2 + (3 - 4x)^2$ b) $(2 - \frac{2}{3}y)^2 + y^2$
 c) $(6x - 5y)(3x + 4y) - (9x + 2y)(2x - 3y) - 2y(7y - 16x)$
 d) $(6x \cdot 5y)(3x \cdot 4y) - (9x + 2y)(2x \cdot 3y) - 2y(7y \cdot 16x)$
 e) $(8x - 3y)(2x \cdot 4y) - (8x \cdot 3y)(2x \cdot 4y)$
 f) $-(xy - y^2) + x(x - y)y - y^2 - [xy(xy) - (x - y)(x + y)]$

Modèle 4 : Mettre en évidence le plus grand facteur commun des termes de l'expression :

mise en évidence

$$6x - 3x^2y - 2x =$$

$$16x^3y^2 + 12x^3y^4 - 8x^2y^2 =$$

Exercice 2.6: Mettre en évidence le plus grand facteur commun :

- a) $6a + 8ax$ b) $3x^2y - 5x^2y - x^2y$
 c) $x^2 + x$ d) $16x^3 - 8x^2$
 e) $4a^2 + a$ f) $5abc - 8abc + 16bc$
 g) $xy - yz - y$ h) $x - xy + x^2y$
 i) $14xy - 21xyz + 28xy$ j) $36a - 24b + 48c - 12$

Exercice 2.7: Mettre en évidence le plus grand facteur commun :

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| a) $2a^2 - 4a^3$ | b) $x^5 + x^3y$ |
| c) $-ay^4 + y^5$ | d) $5x^5 - 10x^2 + 10x^2z^2$ |
| e) $3y^5 + 6ay^3 + 3y^4$ | f) $-10z^2 + 6z^3 - 2z^5$ |
| g) $-a^5 + a^4 - a^3 + a^2$ | h) $3x^2yz - 9x^3z + 6y^2z^2$ |
| i) $a^2 - 3a + 6ab + a^2b^2$ | j) $4x^2y + 32xy^2 + 8x^2y^2$ |

Exercice 2.8: Mettre en évidence le plus grand facteur commun :

- | | |
|---|-------------------------------|
| a) $\pi R^2 + 2\pi R$ | b) $6L + L \cdot 2\pi$ |
| c) $\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \pi$ | d) $\pi R^2 - \sqrt{3}R + 4R$ |

Exercice 2.9: Dans les expressions suivantes, regrouper les termes en x de même puissance à l'aide d'une mise en évidence :

- | |
|---|
| a) $ax^2 + 7x^3 - 2a^2x^2 + 3bx - 6a^2x^3 + 5x$ |
| b) $6bx^2 - 2x^3 - a^2x^2 - 2ax + 6ax^3 + 7bx$ |

2.2 Calcul littéral avec des fractions

Rappel : Dans la fraction $\frac{a}{b}$, a est le **numérateur** et b est le **dénominateur**.

Simplification ou amplification

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Modèle 5 : Simplifier la fraction $\frac{21a^3b^4}{14a^4b}$

simplification de fraction

Modèle 6 : Simplifier la fraction $\frac{21a^2b + 7a^3b^2}{7a^3b^2}$

simplification de fraction

Exercice 2.10: Simplifier les expressions suivantes :

a) $\frac{3a^2b}{27ab^2}$

b) $\frac{24a^4b^5}{18a^2b^2}$

c) $\frac{36a^2b}{27a^5b^3}$

d) $\frac{81a^2bc^3}{36ab^3}$

Exercice 2.11: Simplifier la fraction :

a) $\frac{x^2 + x}{2x}$

b) $\frac{15x - 10}{5}$

c) $\frac{2x^2 + 4x}{x + 2}$

Multiplication

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Multiplication d'une fraction et d'un nombre

$$a \cdot \frac{b}{c} \neq \frac{ab}{ac}, \quad \text{mais} \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

Modèle 7 : Effectuer $\frac{2x^3}{xy} \cdot \frac{y}{4}$

multiplication de fractions

Modèle 8 : Effectuer $8 \cdot \left(\frac{x+2}{4} - \frac{x-2}{2} \right)$

multiplication de fractions

Exercice 2.12: Simplifier les expressions suivantes :

a) $\frac{x^3}{3} \cdot \frac{9y}{x}$

b) $12 \cdot \left(\frac{x}{6} - 2 \right)$

c) $12 \cdot \left(\frac{x-1}{3} + \frac{x}{2} \right)$

d) $6 \cdot \left(\frac{2-x}{3} - \frac{x-1}{2} \right)$

Division (on multiplie par la fraction inversée)

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Modèle 9 : Effectuer $\frac{2}{x^2} \div \frac{3}{x}$

"division" de fractions

Mise en garde : La place du signe d'égalité est fondamentale :

$$\frac{\frac{8}{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ alors que } \frac{\frac{8}{4}}{\frac{8}{2}} = \frac{8}{2} = 4$$

Exercice 2.13: Effectuer et simplifier les expressions suivantes :

a) $\frac{x}{12} \div \frac{r}{2}$

b) $\frac{\frac{2x+4}{9}}{\frac{2}{3}}$

Addition et soustraction

Si les fractions ont le même dénominateur :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commence par amplifier les deux fractions pour les mettre à un dénominateur commun.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Modèle 10 : Additionner les fractions suivantes : $\frac{2}{15} + \frac{5}{12} + \frac{1}{10} =$

opération sur les fractions

Modèle 11 : Effectuer les opérations suivantes : $\frac{3}{2ab} + \frac{5c}{ab^2} - \frac{7c}{3a^2b} =$

opération sur les fractions

Exercice 2.14: Effectuer les opérations suivantes :

a) $\frac{3}{8} + \frac{7}{12} - \frac{5}{9} =$

b) $\frac{5}{2} + \frac{7}{3} - \frac{4}{8} =$

c) $\frac{11}{16} + \frac{7}{24} + \frac{9}{15} =$

d) $\frac{3}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} =$

e) $\frac{c}{a^2b} - \frac{2a}{b^2c} + \frac{b}{ac} =$

f) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{2} + \frac{5x}{7} =$

g) $\frac{x}{3} - \frac{3}{x} =$

h) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} =$

i) $\frac{3}{x^2} - 2 + \frac{5}{x} =$

j) $\frac{8}{x^2y^2} - \frac{1}{2} =$

2.3 Les identités remarquables

Exercice 2.15: Développer :

a) $(a + b)^2$

b) $(a - b)^2$

c) $(a + b)(a - b)$

d) $(a + b)^3$

e) $(a - b)^3$

Identités remarquables : À l'aide des réponses de l'exercice précédent, compléter

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $(a + b)^2 =$ • $(a - b)^2 =$ • $(a + b)(a - b) =$ |
|---|

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $(a + b)^3 =$ • $(a - b)^3 =$ |
|--|

Exercice 2.16: En utilisant les produits remarquables, développer :

a) $(2x+5)^2$

b) $(1-7x)^2$

c) $(x+3)(x-3)$

d) $(2x+5)(2x-5)$

e) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

f) $[(x+2)(x-2)]^2$

g) $(x+2)^3$

h) $(1-2x)^3$

i) $(3x-5)^3$

j) $(-4x+3)^2$

Un truc pour épater la galerie : Calculer mentalement 32^2

Exercice 2.17: Calculer mentalement

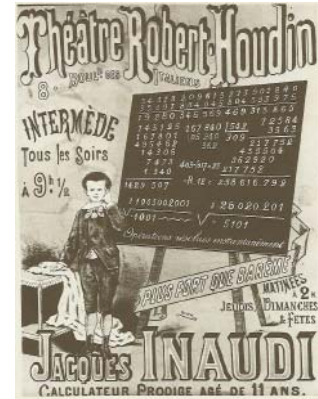
a) 73^2

b) 101^2

c) 99^2

d) $18 \cdot 22$

e) $31 \cdot 49$



Jacques Inaudi était pâle lorsque la passion des chiffres le prit à 6 ans (affiche de 1878)