

EXERCICE 4A.1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$.

- Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 4A.2 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 4A.3 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5 \times (-1)^n$

- Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 4A.4 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$
 (u_n) est-elle une suite géométrique ?

EXERCICE 4A.5 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7^n$
 (u_n) est-elle une suite géométrique ?

EXERCICE 4A.6 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^n$
 (u_n) est-elle une suite géométrique ?

*Dans tous les exercices qui suivent, (u_n) est une suite géométrique de raison q .
On rappelle la formule : $u_n = u_0 \times q^n$*

EXERCICE 4A.7

- On donne $u_0 = -1$ et $q = 2$. → Calculer u_7 .
- On donne $u_0 = 7$ et $q = \frac{1}{2}$. → Calculer u_5 .
- On donne $u_0 = 243$ et $q = \frac{-1}{3}$. → Calculer u_5 .

EXERCICE 4A.8

- On donne $u_3 = 2$ et $q = 3$. → Calculer u_6 .
- On donne $u_5 = 2$ et $q = -5$. → Calculer u_9 .
- On donne $u_3 = 0,01$ et $q = -10$. → Calculer u_7 .
- On donne $u_8 = 512$ et $q = 2$. → Calculer u_3 .
- On donne $u_2 = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{2}{3}$. → Calculer u_5 .

EXERCICE 4A.9

- On donne $u_2 = 17$ et $u_3 = 51$
→ Calculer q puis u_5 .
- On donne $u_1 = 7$ et $u_3 = 112$
→ Calculer q puis u_6 .
- On donne $u_7 = 11$ et $u_{10} = 3\,773$
→ Calculer q puis u_{12} .
- On donne $u_5 = 41$ et $u_9 = 25\,625$
→ Calculer q puis u_{10} .
- On donne $u_4 = 256$ et $u_{15} = 0,125$
→ Calculer q puis u_{18} .

EXERCICE 4A.10

- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 2$.
→ Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.
- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 64$ et de raison $q = 0,5$.
→ Calculer $u_1 + \dots + u_{12}$.
- Soit (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_5 = 5$ et de raison $q = 0,9$.
→ Calculer $u_5 + u_6 + \dots + u_{20}$.

EXERCICE 4A.11 Un nageur s'apprête à traverser la manche, soit une distance de 21 km. Pendant de la première heure, il parcourt 2,1 km. Mais à cause de la fatigue, à chaque heure il ne nage que 90% de la distance nagée pendant l'heure précédente.

1.
 - a. Déterminer une suite géométrique u_n de premier terme $u_1 = 2,1$ dont chaque terme correspond à la distance nagée pendant la $n^{\text{ème}}$ heure.
 - b. Déterminer u_2 , u_5 et u_{10} .
2. Quelle est la distance parcourue...
 - a. ... en 10 heures ?
 - b. ... en 20 heures ?
 - c. ... en 100 heures ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci Montpellier

EXERCICE 4A.1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$.

a. $u_1 = 3 \times 2^1 = 6$; $u_2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$
et $u_3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$.

b. $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2 \times 2^n = 6 \times 2^n$

c. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = 2$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3 \times 2^0 = 3$ et de raison $q = 2$.

EXERCICE 4A.2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

a. $u_1 = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{3}{2}$; $u_2 = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$
et $u_3 = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{3}{8}$.

b. $u_{n+1} = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = -3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-3 \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$ donc (u_n) est une suite

géométrique de premier terme $u_0 = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = -3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 4A.3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5 \times (-1)^n$

a. $u_1 = -5 \times (-1)^1 = 5$; $u_2 = -5 \times (-1)^2 = -5$
et $u_3 = -5 \times (-1)^3 = 5$.

b. $u_{n+1} = -5 \times (-1)^{n+1} = -5 \times (-1) \times (-1)^n = 5 \times (-1)^n$

c. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-5 \times (-1)^{n+1}}{-5 \times (-1)^n} = -1$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -5 \times (-1)^0 = -5$ et de raison $q = -1$.

EXERCICE 4A.4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$: le rapport entre deux termes consécutifs n'est pas constant (il dépend de n), donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

EXERCICE 4A.5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7^n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7^{n+1}}{7^n} = 7$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 7^0 = 1$ et de raison $q = 7$.

EXERCICE 4A.6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^{n+1}}{3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^n} = \frac{-5}{2}$ donc (u_n) est une suite

géométrique de premier terme $u_0 = 3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^0 = 3$ et de raison $q = \frac{-5}{2}$.

*Dans tous les exercices qui suivent, (u_n)
est une suite géométrique de raison q .
On rappelle la formule : $u_n = u_0 \times q^n$*

EXERCICE 4A.7

a. On donne $u_0 = -1$ et $q = 2$.

$$\rightarrow u_7 = u_0 \times q^7 = (-1) \times 2^7 = -128.$$

b. On donne $u_0 = 7$ et $q = \frac{1}{2}$.

$$\rightarrow u_5 = u_0 \times q^5 = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}.$$

c. On donne $u_0 = 243$ et $q = \frac{-1}{3}$.

$$\rightarrow u_5 = u_0 \times q^5 = 243 \times \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = -1.$$

EXERCICE 4A.8

a. On donne $u_3 = 2$ et $q = 3$.

$$\rightarrow u_6 = u_3 \times q^{6-3} = 2 \times 3^3 = 54$$

b. On donne $u_5 = 2$ et $q = -5$.

$$\rightarrow u_9 = u_5 \times q^{9-5} = 2 \times (-5)^4 = 1250.$$

c. On donne $u_3 = 0,01$ et $q = -10$

$$\rightarrow u_7 = u_3 \times q^{7-3} = 0,01 \times (-10)^4 = 100$$

d. On donne $u_8 = 512$ et $q = 2$.

$$\rightarrow u_8 = u_3 \times q^{8-3} \Leftrightarrow 512 = u_3 \times 2^5$$

$$\rightarrow u_3 = \frac{512}{2^5} = \frac{512}{32} = 16$$

e. On donne $u_2 = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{2}{3}$.

$$\rightarrow u_5 = u_2 \times q^{5-2} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{8}{27} = \frac{2}{9}$$

EXERCICE 4A.9

a. On donne $u_2 = 17$ et $u_3 = 51$

$$\rightarrow u_3 = u_2 \times q \text{ donc } q = \frac{u_3}{u_2} = \frac{51}{17} = 3$$

$$\rightarrow u_5 = u_2 \times q^{5-2} = 17 \times 3^3 = 459$$

b. On donne $u_1 = 7$ et $u_3 = 112$

$$\rightarrow u_3 = u_1 \times q^{3-1} \text{ donc } q^2 = \frac{u_3}{u_1} = \frac{112}{7} = 16$$

$$\rightarrow q^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (q+4)(q-4) = 0$$

$$\rightarrow \text{soit } q = -4, \text{ soit } q = 4$$

$$\rightarrow \text{si } q = -4, u_6 = u_1 \times q^{6-1} = 7 \times (-4)^5 = -1792$$

$$\rightarrow \text{si } q = 4, u_6 = u_1 \times q^{6-1} = 7 \times 4^5 = 1792$$

c. On donne $u_7 = 11$ et $u_{10} = 3\,773$

$$\rightarrow u_{10} = u_7 \times q^{10-7} \text{ donc } q^3 = \frac{u_{10}}{u_7} = \frac{3\,773}{11} = 343$$

$$\rightarrow q^3 = 343 \Leftrightarrow q = 343^{\frac{1}{3}} = 7$$

$$\rightarrow u_{12} = u_{10} \times q^2 = 3\,773 \times 7^2 = 184\,877$$

d. On donne $u_5 = 41$ et $u_9 = 25\,625$

$$\rightarrow u_9 = u_5 \times q^{9-5} \text{ donc } q^4 = \frac{u_9}{u_5} = \frac{25\,625}{41} = 625$$

$$\rightarrow q^4 = 625 \Leftrightarrow q = 625^{\frac{1}{4}} = 5$$

$$\rightarrow u_{10} = u_9 \times q = 25\,625 \times 5 = 128\,125$$

e. On donne $u_4 = 256$ et $u_{15} = 0,125$

$$\rightarrow u_{15} = u_4 \times q^{15-4} \text{ donc } q^{11} = \frac{u_{15}}{u_4} = \frac{0,125}{256} = \frac{1}{2^8}$$

$$\rightarrow q^{11} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^{11}}$$

$$\rightarrow q = \left(\frac{1}{2^{11}}\right)^{\frac{1}{11}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow u_{18} = u_{15} \times q^{18-15} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

EXERCICE 4A.10

a. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 2$.

$$\begin{aligned} \rightarrow u_0 + u_1 + \dots + u_{10} &= u_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \\ &= -3 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = -3 \times \frac{1 - 2\,048}{-1} \\ &= 3 \times (-2\,047) = -6\,141 \end{aligned}$$

b. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 64$ et de raison $q = 0,5$.

$$\begin{aligned} \rightarrow u_1 + \dots + u_{12} &= u_1 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \\ &= 64 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \times \frac{1 - \frac{1}{4096}}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= 128 \times \left(\frac{4096}{4096} - \frac{1}{4096} \right) = 128 \times \frac{4095}{4096}$$

$$= \frac{4095}{32}$$

c. Soit (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_5 = 5$ et de raison $q = 0,9$.

$$u_5 + u_6 + \dots + u_{20} = u_5 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$= 5 \times \frac{1 - 0,9^{20-5+1}}{1 - 0,9} = 5 \times \frac{1 - 0,9^{16}}{0,1}$$

$$= \frac{5}{0,1} \times (1 - 0,9^{16}) \approx 40,74$$

EXERCICE 4A.11

Un nageur s'apprête à traverser la manche, soit une distance de 21 km.

Pendant de la première heure, il parcourt 2,1 km. Mais à cause de la fatigue, à chaque heure il ne nage que 90% de la distance nagée pendant l'heure précédente.

1. a. Déterminer une suite géométrique u_n de premier terme $u_1 = 2,1$ dont chaque terme correspond à la distance nagée pendant la $n^{\text{ème}}$ heure : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2,1 \times 0,9^{n-1}$

b. $u_2 = 2,1 \times 0,9^{2-1} = 1,89$

$$u_5 = 2,1 \times 0,9^{5-1} = 1,377\ 81$$

$$u_{10} = 2,1 \times 0,9^{10-1} \approx 0,813\ 58.$$

2. a. Distance parcourue en 10 heures :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = u_1 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 2,1 \times \frac{1 - 0,9^{10}}{1 - 0,9}$$

$$= \frac{2,1}{0,1} \times (1 - 0,9^{10}) \approx 13,678\ \text{km}$$

b. ... en 20 heures ?

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = u_1 \times \frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 2,1 \times \frac{1 - 0,9^{20}}{1 - 0,9}$$

$$= \frac{2,1}{0,1} \times (1 - 0,9^{20}) \approx 18,447\ \text{km}$$

c. ... en 100 heures ?

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = u_1 \times \frac{1 - q^{100}}{1 - q} = 2,1 \times \frac{1 - 0,9^{100}}{1 - 0,9}$$

$$= \frac{2,1}{0,1} \times (1 - 0,9^{100}) \approx 20,9994\ \text{km}$$