

Exercices sur les Variables aléatoires

Exo1 : Un jeu consiste à lancer un dé non pipé

- . si le joueur obtient un 1, il perd 30 €
- . si le joueur obtient un 2, il perd 20 €
- . si le joueur obtient un 3, il perd 10 €
- . si le joueur obtient un 4, il ne perd ni ne gagne rien
- . si le joueur obtient un 5 ou un 6, il gagne 30 €

Soit X la variable aléatoire indiquant le gain (positif ou négatif) du joueur : donner la loi de probabilité de X
Calculer l'espérance (la variance et l'écart-type de cette loi ne sont plus au programme)

Exo2 : Pierre et Anne jouent à pile ou face ; elles misent 5 € chacune.

→ si le résultat est face, Pierre ramasse les mises ; si le résultat est pile, Anne ramasse les mises.

Soit X la variable aléatoire donnant le gain de Pierre : calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

conseil : il est bien sûr utile de donner la loi de probabilité de X .

Exo3 : Un enfant lance simultanément trois pièces de monnaie de 1F, 2F et 5F. Il totalise les francs des pièces qui présentent le côté face.

Soit X la variable aléatoire comptant ce total en francs :

- 1) donner la loi de probabilité de X
- 2) calculer $p(X \leq 2)$ et $p(X > 6)$
- 3) calculer $E(X)$
- 4) (la variance et l'écart-type ne sont plus au programme).

conseil : pour le 1), on pourra s'aider d'un arbre

Exo4 : dans une urne, il y a 15 boules dont 3 boules rouges, 7 boules vertes et 5 boules jaunes.

Un joueur tire une boule au hasard :

- . si elle est rouge, il perd 50 €
- . si elle est verte, il gagne 20 €
- . si elle est jaune, il gagne x €.

Trouver x pour que le jeu soit équitable.

conseil : on dit qu'un jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$

Exo5 :

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'ensemble E des couples $(x ; y)$, avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$, est muni de la loi équirépartie (c'est à dire toutes les issues sont équiprobables).

A chaque couple $(x ; y)$, on associe la valeur absolue de la différence : $|x - y|$.

On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E .

1) Définir la loi de probabilité de X .

6							
5							
4							
3							
2							
1							
y	x	1	2	3	4	5	6

Loi de X :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$						

2) Calculer l'espérance et la variance de X .

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exo1 : Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : -30 ; -20 ; 0 et 30

$$p(X = -30) = \frac{1}{6} ; \quad p(X = -20) = \frac{1}{6} ; \quad p(X = -10) = \frac{1}{6} ; \quad p(X = 0) = \frac{1}{6} ; \quad p(X = 30) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

D'où la loi de probabilité de X :

a_i	-30	-20	-10	0	30
$p(X = a_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

on vérifie que : $\sum_i p_i = 1$

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 a_i \times p_i = -30 \times \frac{1}{6} - 20 \times \frac{1}{6} - 10 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{1}{3} = -5 - \frac{10}{3} - \frac{5}{3} + 0 + 10 = 5 - \frac{15}{3} = 0$$

La variance et l'écart-type ne sont plus au programme :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum p_i \times (a_i)^2 - (E(X))^2 = \frac{1}{3} \times (-30)^2 + \frac{1}{6} \times (-20)^2 + \frac{1}{6} \times (-10)^2 + \frac{1}{6} \times 0^2 + \frac{1}{3} \times 30^2 - \left(-\frac{10}{3}\right)^2 \\ &= \frac{900}{3} + \frac{400}{6} + \frac{100}{6} + \frac{900}{3} - \frac{100}{9} = \frac{2200}{3} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2200}{3}}$$

Exo2 : Pierre et Anne misent 5 € chacune donc une somme totale de 10 € :

si le résultat est face, Pierre ramasse les 10 € : il a donc gagné 5 €

si le résultat est pile, Anne ramasse les mises : Pierre perd donc 5 €

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont donc 5 et -5

$$\text{avec } p(X = 5) = p(X = -5) = \frac{1}{2}$$

D'où la loi de probabilité de X :

a_i	-5	5
$p(X = a_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

on vérifie que : $\sum_i p_i = 1$

Espérance :

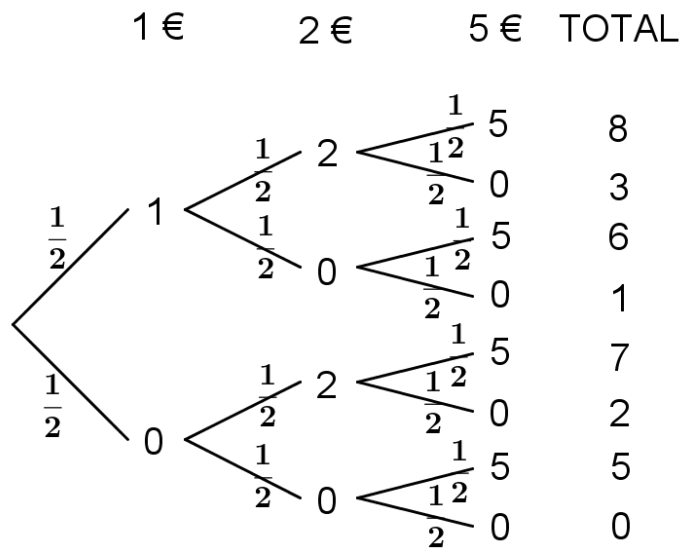
$$E(X) = \sum_{i=1}^2 a_i \times p_i = -5 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 0 \text{ donc } \mathbf{\text{le jeu est équitable}}$$

La variance et l'écart-type ne sont plus au programme :

$$V(X) = \sum p_i \times (x_i)^2 - (E(X))^2 = \frac{1}{2} \times 5^2 + \frac{1}{2} \times (-5)^2 - 0^2 = \frac{25 + 25}{2} = 25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{25} = 5$$

Exo3 :



Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8.

D'où la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3	5	6	7	8
Probabilité $p(X = a_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p(X > 6) = p(X = 7) + p(X = 8) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

3) $E(X) = \sum_{i=1}^8 a_i \times p(X = a_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} + 7 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{8}$

$E(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} + \frac{8}{8} = \frac{32}{8} = 4$

Si le joueur répète ce jeu un grand nombre de fois, il gagnera en moyenne un total de 4 €.

La variance et l'écart-type ne sont plus au programme :

4) $V(X) = \sum p_i \times (x_i)^2 - (E(X))^2$

$= \frac{1}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 2^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 + \frac{1}{8} \times 5^2 + \frac{1}{8} \times 6^2 + \frac{1}{8} \times 7^2 + \frac{1}{8} \times 8^2 - 4^2$

$= \frac{0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64}{8} - 16$

$= \frac{204}{8} - 16 = \frac{51}{2} - \frac{32}{2} = \frac{19}{2} = 9,5$

5) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9,5}$

Exo4 : Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : -50 ; 20 et x.

Or il y a 15 boules dont 3 rouges, 7 vertes et 5 jaunes

donc $p(X = -50) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, $p(X = 20) = \frac{7}{15}$, $p(X = x) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

D'où la loi de probabilité de X :

a_i	-50	20	x
$p(X = a_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$

on vérifie que : $\sum_i p_i = 1$

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 a_i \times p_i = -50 \times \frac{1}{5} + 20 \times \frac{7}{15} + x \times \frac{1}{3} = -10 + \frac{4 \times 5 \times 7}{3 \times 5} + \frac{x}{3} = -\frac{30}{3} + \frac{28}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

Or le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$ donc on résout l'équation :

$$\frac{x}{3} - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2$$

Ainsi **le jeu est équitable lorsque $x = 2$ €.**

Exo5 :

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'ensemble E des couples $(x ; y)$, avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$, est muni de la loi équirépartie (c'est à dire toutes les issues sont équiprobables).

A chaque couple $(x ; y)$, on associe la valeur absolue de la différence des deux dés : $|x - y|$.

On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E.

1) Définir la loi de probabilité de X.

E est l'ensemble des 36 couples de faces (équiprobables) → un tableau est fort utile.

6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
y						
x	1	2	3	4	5	6

Loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4	5
P (X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

2) Espérance de X.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^6 k_i \times p_i = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{18} \\ &= \frac{5}{18} + \frac{4}{9} + \frac{3}{6} + \frac{4}{9} + \frac{5}{18} \\ &= \frac{5}{18} + \frac{8}{18} + \frac{9}{18} + \frac{8}{18} + \frac{5}{18} \\ &= \frac{35}{18} \end{aligned}$$

$$\text{Variance : } V(X) = \frac{665}{324} \approx 2,052$$