RAPPEL $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$ $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

EXERCICE 3B.1

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes, dérivables sur $\mathbb{R}$:

a. $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x+1}$	**b.** $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{x}}$	**c.** $f(x)=\dfrac{3e^{x}+1}{e^{x}-1}$

EXERCICE 3B.2

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes, dérivables sur $\mathbb{R}$:

a. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{x}}$	**b.** $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{2x+1}$
c. $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{x}}$	**d.** $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$

EXERCICE 3B.3

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes, dérivables sur $\mathbb{R}$, en simplifiant au maximum le résultat, en présence de la seule e^{x} :

a. $f(x)=\dfrac{1}{0,5+100e^{-x}}$	**b.** $f(x)=\dfrac{100e^{-x}}{0,5+100e^{-x}}$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

EXERCICE 3B.1

a. $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$

soit : $u(x)=e^x$ et $v(x)=x+1$

$u'(x)=e^x$ et $v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{e^x\times(x+1)-e^x\times 1}{(x+1)^2}=\frac{e^x\times(x+1-1)}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

b. $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^x}$

soit : $u(x)=2x+1$ et $v(x)=e^x$

$u'(x)=2$ et $v'(x)=e^x$

$$f'(x)=\frac{e^x\times(2x+1)-e^x\times 2}{(e^x)^2}=\frac{e^x\times(2x+1-2)}{(e^x)^2}=\frac{(2x-1)e^x}{e^x\times e^x}=\frac{2x-1}{e^x}$$

c. $f(x)=\dfrac{3e^x+1}{e^x-1}$

soit $u(x)=3e^x+1$ et $v(x)=e^x-1$

$u'(x)=3e^x$ et $v'(x)=e^x$

$$f'(x)=\frac{3e^x(e^x-1)-(3e^x+1)\times e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(3e^x-3)-e^x(3e^x+1)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(3e^x-3-3e^x-1)}{(e^x-1)^2}=\frac{-4e^x}{(e^x-1)^2}$$

EXERCICE 3B.2

a. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$

soit : $u(x)=1$ et $v(x)=1-e^x$

$u'(x)=0$ et $v'(x)=-e^x$

$$f'(x)=\frac{-1\times(-e^x)}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x}{(1-e^x)^2}$$

b. $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{2x+1}$

soit : $u(x)=e^{x+1}$ et $v(x)=2x+1$

$u'(x)=e^{x+1}$ et $v'(x)=2$

$$f'(x)=\frac{e^{x+1}\times(2x+1)-e^{x+1}\times 2}{(2x+1)^2}=\frac{e^{x+1}\times(2x+1-2)}{(2x+1)^2}=\frac{e^{x+1}\times(2x-1)}{(2x+1)^2}$$

c. $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{e^x}$

soit : $u(x)=1-e^{-2x}$ et $v(x)=e^x$

$u'(x)=2e^{-2x}$ et $v'(x)=e^x$

$$f'(x)=\frac{2e^{-2x}\times e^x-(1-e^{-2x})\times e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x\left[2e^{-2x}-(1-e^{-2x})\right]}{(e^x)^2}=\frac{3e^{-2x}-1}{e^x}$$

d. $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$

soit : $u(x)=1-e^{-2x}$ et $v(x)=1+e^{2x}$

$u'(x)=-(-2)e^{-2x}=2e^{-2x}$ et $v'(x)=2e^{2x}$

$$f'(x)=\frac{2e^{-2x}\times(1+e^{2x})-(1-e^{-2x})\times 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{2e^{-2x}+2e^{-2x}\times e^{2x}-2e^{2x}+e^{-2x}\times 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

	$=\dfrac{2e^{-2x}+2-2e^{2x}+2}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$ $=\dfrac{2e^{-2x}-2e^{2x}+4}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$

EXERCICE 3B.3

a. $f(x)=\dfrac{1}{0,5+100e^{-x}}$ soit : $u(x)=1$ et $v(x)=0,5+100e^{-x}$ $u'(x)=0$ et $v'(x)=-100e^{-x}$ $f'(x)=\dfrac{0-1\times\left(-100e^{-x}\right)}{\left(0,5+100e^{-x}\right)^2}$ $=\dfrac{100e^{-x}}{\left(0,5+100e^{-x}\right)^2}$ $=\dfrac{100e^{-x}}{\left[0,5\left(1+200e^{-x}\right)\right]^2}$ $=\dfrac{100e^{-x}}{\frac{1}{4}\left(1+200e^{-x}\right)^2}$ $=\dfrac{400e^{-x}}{\left(1+200e^{-x}\right)^2}$ $=\dfrac{400e^{-x}}{\left[e^{-x}\left(e^{x}+200\right)\right]^2}$ $=\dfrac{400e^{-x}}{e^{-2x}\left(e^{x}+200\right)^2}$ $=\dfrac{400e^{-x}\times e^{2x}}{\left(e^{x}+200\right)^2}$ $=\dfrac{400e^{x}}{\left(e^{x}+200\right)^2}$	**b.** $f(x)=\dfrac{100e^{-x}}{0,5+100e^{-x}}$ soit : $u(x)=100e^{-x}$ et $v(x)=0,5+100e^{-x}$ $u'(x)=-100e^{-x}$ et $v'(x)=-100e^{-x}$ $f'(x)=\dfrac{-100e^{-x}\times\left(0,5+100e^{-x}\right)-100e^{-x}\times\left(-100e^{-x}\right)}{\left(0,5+100e^{-x}\right)^2}$ $=\dfrac{100e^{-x}\times\left[-\left(0,5+100e^{-x}\right)+100e^{-x}\right]}{\left(0,5+100e^{-x}\right)^2}$ $=\dfrac{-50e^{-x}}{\left(0,5+100e^{-x}\right)^2}$ $=\dfrac{-50e^{-x}}{\left[0,5e^{-x}\left(e^{x}+200\right)\right]^2}$ $=\dfrac{-50e^{-x}}{\frac{1}{4}e^{-2x}\left(e^{x}+200\right)^2}$ $=\dfrac{-50e^{-x}\times 4e^{2x}}{\left(e^{x}+200\right)^2}$ $=\dfrac{-200e^{x}}{\left(e^{x}+200\right)^2}$

Autre méthode pour la question b :

$$f(x)=\frac{100e^{-x}}{0,5+100e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}=\frac{100e^{-x}\times e^{x}}{\left(0,5+100e^{-x}\right)\times e^{x}}=\frac{100}{0,5e^{x}+100}=100\times\frac{1}{0,5e^{x}+100}$$

On pose $u(x)=0,5e^{x}+100$ donc $u'(x)=0,5e^{x}$

Ainsi : $f'(x) = 100 \times \dfrac{-u'(x)}{u^2(x)} = 100 \times \dfrac{-0,5e^x}{\left(0,5e^x + 100\right)^2}$

$$= \frac{-50e^x}{\left(0,5e^x + 100\right)^2} \times \frac{4}{4} = \frac{-200e^x}{\left(0,5e^x + 100\right)^2 \times 2^2}$$

$$= \frac{-200e^x}{\left[2\left(0,5e^x + 100\right)\right]^2} = \frac{-200e^x}{\left(e^x + 200\right)^2}$$