RAPPELS : $e^0 = 1$ $e^1 = e$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln\left(e^x\right) = x$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$: $e^{\ln x} = x$

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a les égalités :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{ab} = \left(e^a\right)^b$$

EXERCICE 2A.1

$\sqrt{x^2} = x$ *et* $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

$e^{\ln x} = x$ *et* $\ln\left(e^x\right) = x$

Si $e^a = e^b$ alors $a = b$

Si $e^x = e^5$ alors $x = 5$

Sachant que $x \in]0 ; +\infty[$, écrire plus simplement :

a) $\ln \dfrac{1}{e^x}$ b) $e^{2+\ln x}$

EXERCICE 2A.2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a. $e^x = 3$ **b.** $e^x = 1$ **c.** $e^{3x} = 2$

d. $e^x = -2$ **e.** $\dfrac{1}{e^{4x}} = 3$ **f.** $e^x = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a. $e^{x-1} > 3$ **b.** $3e^x - 1 \leq 0$ **c.** $2 - e^{2x} < 0$

3. Après avoir résolu les inéquations nécessaires, établir le tableau de signe des expressions suivantes :

a. $a(x) = e^{3x} - 1$ **b.** $b(x) = e^{-2x} + 3$ **c.** $c(x) = -e^x - 5$

EXERCICE 2A.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$e^{x^2-3x+4} < e^{-8x+7}$$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

EXERCICE 2A.1

Sachant que $x \in]0\,;+\infty[$, écrire plus simplement :

a. $\ln \frac{1}{e^x} = \ln\left(e^{-x}\right) = -x$

b. $e^{2+\ln x} = e^2 \times e^{\ln x} = e^2 \times x$

EXERCICE 2A.2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a. $e^x = 3 \Leftrightarrow e^x = e^{\ln 3}$
$\Leftrightarrow x = \ln 3$

b. $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^{\ln 1}$
$\Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

c. $e^{3x} = 2 \Leftrightarrow e^{3x} = e^{\ln 2}$
$\Leftrightarrow 3x = \ln 2$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\ln 2$

d. $e^x = -2$ → **pas de solution**

e. $\frac{1}{e^{4x}} = 3 \Leftrightarrow e^{-4x} = 3$
$\Leftrightarrow e^{-4x} = e^{\ln 3}$
$\Leftrightarrow -4x = \ln 3$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\ln 3$

f. $e^x = 0$ → **pas de solution**

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a. $e^{x-1} > 3$
$\Leftrightarrow e^{x-1} > e^{\ln 3}$
Exp est une fonction croissante
$\Leftrightarrow x-1 > \ln 3$
$\Leftrightarrow x > 1+\ln 3$
$S =]1+\ln 3;+\infty[$

b. $3e^x - 1 \le 0$
$\Leftrightarrow e^x \le \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow e^x \le e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
$\Leftrightarrow x \le \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$S = \left]-\infty;\ln\frac{1}{3}\right]$

c. $2 - e^{2x} < 0$
$\Leftrightarrow 2 < e^{2x}$
$\Leftrightarrow e^{\ln(2)} < e^{2x}$
$\Leftrightarrow \ln 2 < 2x$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 < x$
$S = \left]-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right[$

3. Après avoir résolu les inéquations nécessaires, établir le tableau de signe des expressions suivantes :

a. $a(x) = e^{3x} - 1$

$e^{3x} - 1 > 0$
$\Leftrightarrow e^{3x} > 1$
$\Leftrightarrow e^{3x} > e^0$
Exp est une fonction croissante
$\Leftrightarrow 3x > 0$
$\Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$a(x)$	$-$		$+$

b. $b(x) = e^{-2x} + 3$

$e^{-2x} + 3 > 0$
$\Leftrightarrow e^{-2x} > -3$
or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$:
$e^{-2x} > 0 > -3$

x	$-\infty$	$+\infty$
$b(x)$	$+$	

c. $c(x) = -e^x - 5$

$-e^x - 5 > 0$
$\Leftrightarrow -e^x > 5$
$\Leftrightarrow e^x < -5$
ce qui est impossible

x	$-\infty$	$+\infty$
$c(x)$	$-$	

EXERCICE 2A.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x^2-3x+4} < e^{-8x+7}$

$$e^{x^2-3x+4} < e^{-8x+7} \iff x^2-3x+4 < -8x+7$$

$$\iff x^2-3x+4+8x-7<0$$

$$\iff x^2+5x-3<0$$

$\Delta = 37$ donc cette expression du second degré possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{37}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$$

$a=1$ donc la parabole est « orientée vers le haut » :

$$x^2+5x-3<0 \text{ si } x \in \left]\frac{-5-\sqrt{37}}{2};\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right[$$