

RAPPEL :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

EXERCICE 3A.1

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0^+} -5 \ln x =$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} -5 \ln x =$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 + \ln x =$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \ln x =$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - \ln x =$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} =$$

$$\text{g. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3}{\ln x} =$$

$$\text{h. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{7} =$$

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{3} \ln x =$$

$$\text{j. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\ln x} =$$

EXERCICE 3A.2

Déterminer les limites suivantes, en écrivant chaque fonction f sous la forme $v \circ u$:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) \quad f(x) = v \circ u(x) \quad u(x) = \quad v(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} u(x) =$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{u(x) \rightarrow} u(x)$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+1) \quad f(x) = v \circ u(x) \quad u(x) = \quad v(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) =$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x) = \lim_{u(x) \rightarrow} u(x)$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} \quad f(x) = v \circ u(x) \quad u(x) = \quad v(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) =$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = \lim_{u(x) \rightarrow} u(x)$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{x} \quad f(x) = v \circ u(x) \quad u(x) = \quad v(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) =$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = \lim_{u(x) \rightarrow} u(x)$$

EXERCICE 3A.3

1. Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

$$\text{a. } f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\text{b. } f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$$

$$\text{c. } f(x) = x - \ln x$$

$$\text{d. } f(x) = x^2 - x \ln x$$

$$\text{e. } f(x) = x^2 - 2x + 3 + 4 \ln x$$

$$\text{f. } f(x) = 3 \ln x - x - 3$$

2. Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

$$\text{a. } f(x) = x^2 + x \ln x$$

$$\text{b. } f(x) = 2 + x^3 \ln x$$

$$\text{c. } f(x) = x(\ln x - 3)$$

3. Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

$$\text{a. } f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\text{b. } f(x) = \frac{\ln(x+1) + x}{x}$$

$$\text{c. } f(x) = \frac{x^2 - 2 \ln(x+1)}{x}$$

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER**EXERCICE 3A.1**Déterminer les limites suivantes, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} -5 \ln x = +\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5 \ln x = -\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 5 + \ln x = -\infty$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \ln x = +\infty$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - \ln x = +\infty$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0^+$

g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3}{\ln x} = 0^+$

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{7} = +\infty$

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{3} \ln x = +\infty$

j. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\ln x} = 0^-$

EXERCICE 3A.2Déterminer les limites suivantes, en écrivant chaque fonction f sous la forme $v \circ u$:

a. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x)$ $f(x) = v \circ u(x)$ $u(x) = 1+x$ $v(x) = \ln x$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1+x = 0^+$ \rightarrow ce qui revient à dire : on pose $u(x) = 1+x$
 donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{u(x) \rightarrow 0^+} \ln(u(x)) = -\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+1)$ $f(x) = v \circ u(x)$ $u(x) = -2x+1$ $v(x) = \ln x$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x+1 = +\infty$ \rightarrow ce qui revient à dire : on pose $u(x) = -2x+1$
 donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+1) = \lim_{u(x) \rightarrow +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x}$ $f(x) = v \circ u(x)$ $u(x) = \frac{1}{x}$ $v(x) = \ln x$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ \rightarrow ce qui revient à dire : on pose $u(x) = \frac{1}{x}$
 donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} = \lim_{u(x) \rightarrow +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{x}$ $f(x) = v \circ u(x)$ $u(x) = \frac{1+x}{x}$ $v(x) = \ln x$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$ \rightarrow ce qui revient à dire : on pose $u(x) = \frac{1+x}{x}$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{x} = \lim_{u(x) \rightarrow 1} \ln(u(x)) = 0$

EXERCICE 3A.31. Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$, sachant que sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 3 + 4 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + 4 \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \ln x - x - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 \frac{\ln x}{x} - 1 - \frac{3}{x}\right) = -\infty$$

2. Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 , sachant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x^3 \ln x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x - 3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - 3x) = 0$$

3. Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 , sachant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 \frac{\ln(x+1)}{x} = -2$$