Corrigé Test 5 - Dérivées - Série A 11.02.14

Problème 1. Calculer la dérivée de la fonction ci-dessous en $a = 9$ en utilisant la définition de la dérivée.

$$f(x) = 2\sqrt{x}$$

Solution. On a $f(9) = 2\sqrt{9} = 6$. Donc

$$f'(9) = \lim_{x\to 9} \frac{2\sqrt{x}-6}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{2}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{2}{(\sqrt{9}+3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Problème 2. Dériver les fonctions suivantes en utilisant les formules de dérivation. Toutes les réponses doivent être factorisées au maximum sauf la 1) et 3).

1. $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1$
2. $f(x) = (3x^2+1)^4(1-3x)^{15}$
3. $f(x) = (x^3 + a^2)^5$
4. $f(x) = 2t^2x$
5. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$
6. $f(x) = 6\sqrt{2-3x}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$
8. $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^3}$

Solution

1. $f'(x) = [4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1]' = 20x^4 - 12x^3 + 4x$

2.
$$\begin{aligned} f'(x) &= [(3x^2+1)^4(1-3x)^{15}]' \\ &= 4(3x^2+1)^3 \cdot 6x \cdot (1-3x)^{15} + (3x^2+1)^4 \cdot (-45)(1-3x)^{14} \\ &= 3(3x^2+1)^3(1-3x)^{14}[8x(1-3x) + (3x^2+1)\cdot(-15)] \\ &= 3(3x^2+1)^3(1-3x)^{14}[8x - 24x^2 - 45x^2 - 15] \\ &= 3(3x^2+1)^3(1-3x)^{14}(-69x^2 + 8x - 15) \\ &= -3(3x^2+1)^3(1-3x)^{14}\underbrace{(69x^2 - 8x + 5)}_{\Delta<0} \end{aligned}$$

3. $f'(x) = [(x^3+a^2)^5]' = 5(x^3+a^2)^4 3x^2 = 15x^2(x^3+a^2)^4$

4. $'f(x) = [2t^2x]' = 2t^2$

5. $f'(x) = [\sqrt[5]{x^2}]' = [x^{\frac{2}{5}}]' = \dfrac{2}{5}(x)^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

6. $f'(x) = [6\sqrt{2-3x}]' = \dfrac{6}{2}(2-3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3) = -\dfrac{9}{\sqrt{2-3x}}$

7. $f'(x) = \left[\dfrac{x^3}{x-1}\right]' = \dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{3x^3-3x^2-x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

8.

$$\begin{aligned} f'(x) = \left[3x^2 - \frac{3}{x^3}\right]' &= 6x - [3x^{-3}]' = 6x - (-9x^{-4}) = 6x + \frac{9}{x^4} \\ &= \frac{6x^5+9}{x^4} = \frac{3(2x^5+3)}{x^4} \end{aligned}$$