Révision factorisation des polynômes

Nous avons vu les 5 méthodes de factorisation suivantes

1. Factorisation par mise en évidence
2. Factorisation par l'utilisation des produits remarquables
3. Factorisation de trinôme du 2ème degré (unitaire ou non unitaire)
4. Factorisation par la méthode des groupements
5. Factorisation par la division polynomiale

Face à un polynôme quelconque, il convient d'essayer d'appliquer ces différentes méthodes dans l'ordre cité ci-dessus.

Il s'agit donc de se poser les questions suivantes :

1. Y a-t-il une mise en évidence possible pour ce polynôme ?
2. Est-ce un produit remarquable ?
3. Est-ce un trinôme du 2ème degré unitaire ou non unitaire ?
4. Peut-on grouper certains termes afin de mettre en évidence un terme commun ?
5. En dernier recourt, si aucunes des quatre premières méthodes n'est possible alors utiliser la division polynomiale.

Rappel des différentes méthodes

☐ Factorisation par mise en évidence

On peut mettre en évidence (sortir) un nombre, un monôme ou même un polynôme. La simple mise en évidence d'un nombre est parfois vitale pour la suite de la factorisation.

exemples

- $8ab-12a^2+20b=\boxed{4}\cdot 2ab-\boxed{4}\cdot 3a^2+\boxed{4}\cdot 5b=\boxed{4}\cdot\left(2ab-3a^2+5b\right)$
- $8a^3b^2-12a^5+20a^4b=\boxed{4a^3}\cdot 2b^2-\boxed{4a^3}\cdot 3a^2+\boxed{4a^3}\cdot 5ab=\boxed{4a^3}\cdot\left(2b^2-3a^2+5ab\right)$
- $5a^2\left(a^4b+3\right)+\left(6a+b\right)\left(a^4b+3\right)=\boxed{\left(a^4b+3\right)}\cdot 5a^2+\boxed{\left(a^4b+3\right)}\cdot\left(6a+b\right)=\boxed{\left(a^4b+3\right)}\cdot\left(5a^2+6a+b\right)$

☐ Factorisation par l'utilisation des produits remarquables

Pour les différentes formules, voir formulaire numérique page 6.

exemples

- $25a^2 + 30ab + 9b^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = (5a + 3b)^2$
- $25x^2 - 121 = (5x)^2 - 11^2 = (5x - 11)(5x + 11)$
- $27z^3 - 64 = (3z)^3 - 4^3 = (3z - 4)\left((3z)^2 + 3z \cdot 4 + 4^2\right) = (3z - 4)(9z^2 + 12z + 16)$

☐ Factorisation de trinôme du 2ème degré (unitaire ou non unitaire)

<u>Pour un trinôme du 2ème degré **unitaire** (formulaire numérique page 6)</u> :

Trouver deux nombres dont le produit est le terme constant du trinôme et la somme est le coefficient du terme en *x*.

$$(x + \mathrm{a})(x + \mathrm{b}) = x^2 + (\mathrm{a+b})x + \mathrm{ab}$$

$\uparrow$ 1er nombre (a) ; $\uparrow$ 2ème nombre (b) ; $\uparrow$ somme (a+b) ; $\uparrow$ produit (ab)

exemples

- $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4) \Leftrightarrow$ en effet $(2 + 4 = 6)$ et $(2 \cdot 4 = 8)$
- $x^2 + 11x + 24 = (x + 3)(x + 8) \Leftrightarrow$ en effet $(3 + 8 = 11)$ et $(3 \cdot 8 = 24)$
- $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6) \Leftrightarrow$ en effet $(-2 + 6 = 4)$ et $((-2) \cdot 6 = -12)$

<u>Pour un trinôme du 2ème degré **non unitaire** (formulaire numérique page 6)</u> :

Soit le trinôme $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$. Résoudre l'équation associée $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$ grâce à la méthode du discriminant $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution donc le trinôme **n'est pas factorisable**
Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution x_1 donc le polynôme se factorise en
$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = \mathbf{a}(x - x_1)^2$
Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 donc le polynôme se factorise en
$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = \mathbf{a}(x - x_1)(x - x_2)$

exemples

- $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x+1)=(2x+3)(x+1) \;\Leftrightarrow\;$ en effet $\Delta = 25-24=1$ et donc

  $x_1=\dfrac{-5-1}{4}=\dfrac{-6}{4}=\dfrac{-3}{2}$; $x_2=\dfrac{-5+1}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

- $6x^2+11x+3=6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\cdot 3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=(2x+3)(3x+1) \;\Leftrightarrow\;$ en effet

  $\Delta=121-72=49=7^2$ et donc $x_1=\dfrac{-11-7}{12}=\dfrac{-18}{12}=\dfrac{-3}{2}$; $x_2=\dfrac{-11+7}{12}=\dfrac{-4}{12}=\dfrac{-1}{3}$

- $8x^2+14x-15=8\left(x-\dfrac{3}{4}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)=4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)=(4x-3)(2x+5) \;\Leftrightarrow\;$ en effet

  $\Delta=196-(-480)=676=26^2$ et donc $x_1=\dfrac{-14+26}{16}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$; $x_2=\dfrac{-14-26}{16}=\dfrac{-40}{16}=\dfrac{-5}{2}$

☐ Factorisation par la méthode des groupements

Cette méthode consiste à former plusieurs groupes de termes (dans les exemples les plus courants deux groupes), de telle manière que l'on puisse soit mettre en évidence un certain facteur commun aux différents groupes, soit utiliser une formule.

exemples

- $ax+bx-ay-by=(ax-ay)+(bx-by)=a\boxed{(x-y)}+b\boxed{(x-y)}=\boxed{(x-y)}(a+b)$
- $\boxed{x^2+6x+9}-\boxed{4y^2}=\underbrace{(x+3)^2-(2y)^2}_{A^2-B^2}=\underbrace{(x+3-2y)(x+3+2y)}_{(A-B)(A+B)}$
- $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^5+x^4+x^3)+(x^2+x+1)=x^3\boxed{(x^2+x+1)}+1\cdot\boxed{(x^2+x+1)}=$

  $=\boxed{(x^2+x+1)}\underbrace{(x^3+1)}_{A^3+B^3}=(x^2+x+1)\underbrace{(x+1)(x^2-x+1)}_{(A+B)(A^2-AB+B^2)}$

☐ Factorisation par la division polynomiale

Un polynôme qui admet un zéro entier, notons-le k, est divisible par le binôme $x-k$. Chercher donc un zéro du polynôme par tâtonnement puis effectuer la division sans reste par la méthode du schéma de Horner (formulaire numérique page 7).

exemples

■

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

Rechercher un zéro du polynôme :

$P(1) = 1 + 3 - 10 - 24 = -30 \neq 0$

$P(-1) = -1 + 3 + 10 - 24 = -12 \neq 0$

$P(2) = 8 + 12 - 20 - 24 = -24 \neq 0$

$\boxed{P(-2) = -8 + 12 + 20 - 24 = 0}$

Le polynôme est donc divisible par $(x+2)$

Effectuer cette division par le schéma de Horner :

	1	3	-10	-24
$\boxed{-2}$		-2	-2	24
	1	1	-12	$\boxed{0}$

$$\Rightarrow P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = (x+2)\left(x^2 + x - 12\right) = (x+2)(x+4)(x-3)$$

■

$P(x) = -2x^3 - 7x^2 + 14x - 5$

Rechercher un zéro du polynôme :

$\boxed{P(1) = -2 - 7 + 14 - 5 = 0}$

Le polynôme est donc divisible par $(x-1)$

Effectuer cette division par le schéma de Horner :

	-2	-7	14	-5
$\boxed{1}$		-2	-9	5
	-2	-9	5	$\boxed{0}$

$$\Rightarrow P(x) = -2x^3 - 7x^2 + 14x - 5 = (x-1)\left(-2x^2 - 9x + 5\right) = (x-1)(-2x+1)(x+5)$$

■

$P(x) = -x^3 + 3x + 2$

Rechercher un zéro du polynôme :

$P(1) = -1 + 3 + 2 = 4 \neq 0$

$\boxed{P(-1) = 1 - 3 + 2 = 0}$

Le polynôme est donc divisible par $(x+1)$

Effectuer cette division par le schéma de Horner :

	-1	0	3	2
$\boxed{-1}$		1	-1	-2
	-1	1	2	$\boxed{0}$

$$\Rightarrow P(x) = -x^3 + 3x + 2 = (x+1)(-x^2 + x + 2) = (x+1)(-x+2)(x+1)$$

Application à un polynôme quelconque (toutes méthodes confondues)

exemples

- $36x^2 - 100 \underset{\text{mise en évidence}}{=} 4(9x^2 - 25) \underset{\text{produit remarquable}}{=} 4(3x-5)(3x+5)$
- $-6x^2 - 12x + 90 \underset{\text{mise en évidence}}{=} -6(x^2 + 2x - 15) \underset{\text{trinôme du } 2^{\text{ème}} \text{degré}}{=} -6(x-3)(x+5)$
- $2x^5 + 16x^2 \underset{\text{mise en évidence}}{=} 2x^2(x^3 + 8) \underset{\text{produit remarquable}}{=} 2x^2(x+2)(x^2 - 2x + 4)$