GYMNASE DE BURIER

Chapitre 1 - Factorisation

Sarah Dégallier Rochat

1.1 La factorisation

Définition 1.1 Un facteur est l'un des éléments constitutifs d'un produit.

Exemple 1.1

1. Dans l'expression $(x-2)\cdot(x+3)$, $x-2$ et $x+3$ sont des facteurs.
2. Dans l'expression $(x-2)+(x+3)$, $x-2$ et $x+3$ ne sont pas des facteurs.

Définition 1.2 On dit qu'un polynôme est factorisé s'il est écrit comme un produit de facteurs.

Exemple 1.2

1. Le polynôme $p(x) = 10\cdot(x-5)^2\cdot(x-2)\cdot(x+3)$ est factorisé.
2. Le polynôme $p(x) = 10\cdot(x-5)^2+(x-2)\cdot(x+3)$ n'est pas pas factorisé.

Exemple 1.3 Résoudre l'équation $3x - 2 = 0$.

Exercice 1.4 Résoudre l'équation $2x - 4 = 0$.

Exemple 1.5 Résoudre l'équation $(3x - 2) \cdot (2x - 4) = 0$.

Règle 1.1 Résoudre une équation du type

$$(3x-2)\cdot(2x-4)=0$$

revient donc à résoudre chacun des facteurs séparément :

$$\boxed{(3x-2)\cdot(2x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \\ 2x-4=0 \end{cases}}$$

et à grouper les solutions.

Exercice 1.2 Résoudre l'équation suivante :

$$10\cdot(x+10)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(12-3x)=0$$

Exemple 1.6 Ecrire une équation dont les solutions sont 4, -5 et $\sqrt{3}$. Y a-t-il d'autres équations possibles ?

Exercice 1.3 Résoudre les équations suivantes.

1. $x - 7 = 0$
2. $4 \cdot (4x - 3) \cdot (x + 4)^2 = 0$
3. $x^2 \cdot (2 - 3x)^5 \cdot (x + 1) = 0$
4. $4x(1 - x) = 0$
5. $(x - 3)(x^2 + 2x + 1) = 0$

<u>Définition 1.3</u> Un polynôme est factorisé au maximum si tous les facteurs le composant soit un zéro soit aucun zéro et sont réduits au maximum. De plus, les termes ayant le même zéro sont groupés.

<u>Exemple 1.3</u> Les polynômes suivants sont-ils factorisés au maximum ? Justifier dans le cas contraire.

1. $5(x+3)$
2. $(x+1)(x^2-4)$
3. $4x+3$
4. $2(2+x+4)$

<u>Exercice 1.4</u> Les polynômes suivants sont-ils factorisés au maximum ?

1. $4(x-2)-4x$
2. $3(x-2)-x(x-2)$
3. $5(x+2)(x+2)$
4. $5(x^2+4x+4)$
5. $5(x+2)^2$
6. $2(x^2+1)$
7. x^2-1
8. $5x$

2. La mise en évidence (MEE)

On peut écrire n'importe quelle équation sous sa forme factorisée :

$$\underbrace{14x^3+28x^2=0}_{\text{forme non factorisée}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{14x^2(x+2)=0}_{\text{forme factorisée}}$$

La factorisation nous permet de trouver les solutions d'une équation, ici $S=\{-2;0\}$.

Nous allons voir différentes méthodes qui permettent de factoriser une équation. Pour commencer, nous allons entraîner la méthode de mise en évidence qui consiste à **identifier un facteur commun dans toutes les expressions de l'équation et à l'extraire.**

Exemple 2.1 Résoudre l'équation $x^2 - 5x = 0$

Nous allons nous concentrer sur la factorisation dans les exercices suivants.

Exemple 2.2 Factoriser le polynôme suivant $5 - 10x$.

Exercice 2.1 Factoriser le polynôme suivant $4x^2 - 2x$.

Exemple 2.3 Factoriser le polynôme suivant $(x+2y) \cdot x - (x+2y)$

Exercice 2.2 Factoriser le polynôme suivant $5(4x-2) - 3(4x-2)$.

3. Les produits remarquables (PR)

Pour factoriser, nous pouvons utiliser les **produits remarquables** vus en première année.

Produits remarquables du deuxième degré

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= A^2+2AB+B^2 \\
(A-B)^2 &= A^2-2AB+B^2 \\
(A+B)(A-B) &= A^2-B^2
\end{aligned}$$

Produits remarquables du troisième degré

$$\begin{aligned}
(A+B)^3 &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \\
(A-B)^3 &= A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 \\
(A+B)(A^2-AB+B^2) &= A^3+B^3 \\
(A-B)(A^2+AB+B^2) &= A^3-B^3
\end{aligned}$$

Exemple 3.1 Factoriser le polynôme suivant $9x^2 + 12xy + 4y^2$.

Contre-exemple 3.1 Factoriser le polynôme $x^2 - 5x + 4$

Exercice 3.1 Factoriser le polynôme suivant $x^2y^2 - 16z^2$.

Exemple 3.2 Factoriser le polynôme $27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$.

<u>Exercice 3.2</u> Factoriser le polynôme $125 + 8x^3$.

4. Méthode Somme-Produit (SP)

On désire factoriser un polynôme de la forme $x^2 + bx + c$. Si le polynôme peut être factorisé, il sera de la forme

$(x + \alpha)(x + \beta\ )$

On a donc

$$(x + \alpha)(x + \beta\ ) = \quad x^2 \quad + \qquad bx \qquad + \quad c$$
$$(x + \alpha)(x + \beta\ )$$

On en déduit que

$$\begin{cases} b = \\ c = \end{cases}$$

Grâce à ces relations, on peut trouver les valeurs α et β par tâtonnements dans certains cas.

Exemple 4.1 Factoriser le polynôme x^2+9x+8.

Exercice 4.1 Factoriser le polynôme $x^2-11x+24$.

5. La méthode du discriminant (Δ)

Pour factoriser un polynôme du type $ax^2 + bx + c$, on utilise la méthode du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions :
  $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et alors

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution : $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$ et alors

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions et $ax^2 + bx + c$ n'est pas plus factorisable.

<u>Exemple 5.1</u> Factoriser le polynôme $-x^2+5x-6$.

Exercice 5.1 Factoriser le polynôme $4x^2+8x+4$.

6. La méthode du groupement

La méthode du groupement consiste à former des **groupes de termes** pour pouvoir les mettre en évidence ou appliquer des formules connues.

Exemple 6.1 Factoriser le polynôme $ax - ay + bx - by$

Exemple 6.2 Factoriser le polynôme $x^2 + 6x + 9 - 4y^2$

Exercice 6.1 Factoriser les polynômes suivants

1. $xy + 3y - x - 3$

2. $3x^3 + 2x + 6x^2 + 4$

3. $(x^2 - 8x + 16) - (x^2 + 4x + 4)$

7. Résolution d'équations

On va utiliser les méthodes étudiées pour résoudre des équations.

Exemple 7.1 Résoudre l'équation $12x^3 - x^4 - 36x^2 = 0$.

Exercice 6.2 Résoudre l'équation $x^4 + x^3 - 27x - 27 = 0$.