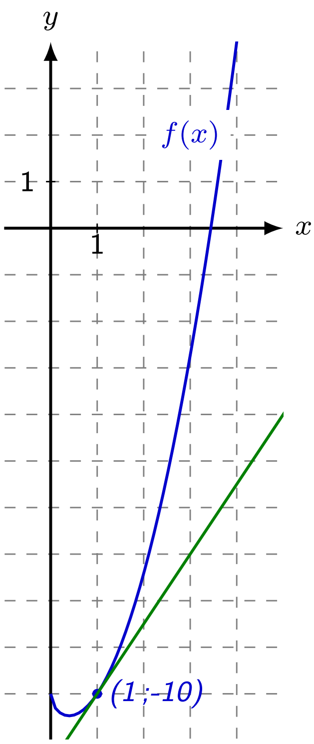
GYMNASE DE BURIER

Chapitre 5 - Applications de la dérivée

Sarah Dégallier Rochat

1. Tangentes

Exemple 1.1 (Tangente en un point) Soit $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 10$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$.



On cherche une droite d'équation $y = mx + h$ passant par le point $P(1, f(1))$.

On commence par calculer la deuxième coordonnée du point :
$f(1) = 1^2 - \sqrt{1} - 10 = 1 - 1 - 10 = -10$
Le point a donc pour coordonnées $(1; -10)$

La dérivée de la fonction nous donne la pente de la tangente. On a donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2 - \sqrt{x} - 10]' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x - \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{4x^2 - \sqrt{x}}{2x} \end{aligned}$$

On évalue la dérivée en $x = 1$ pour trouver la pente de la tangente en ce point : $f'(1) = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$.

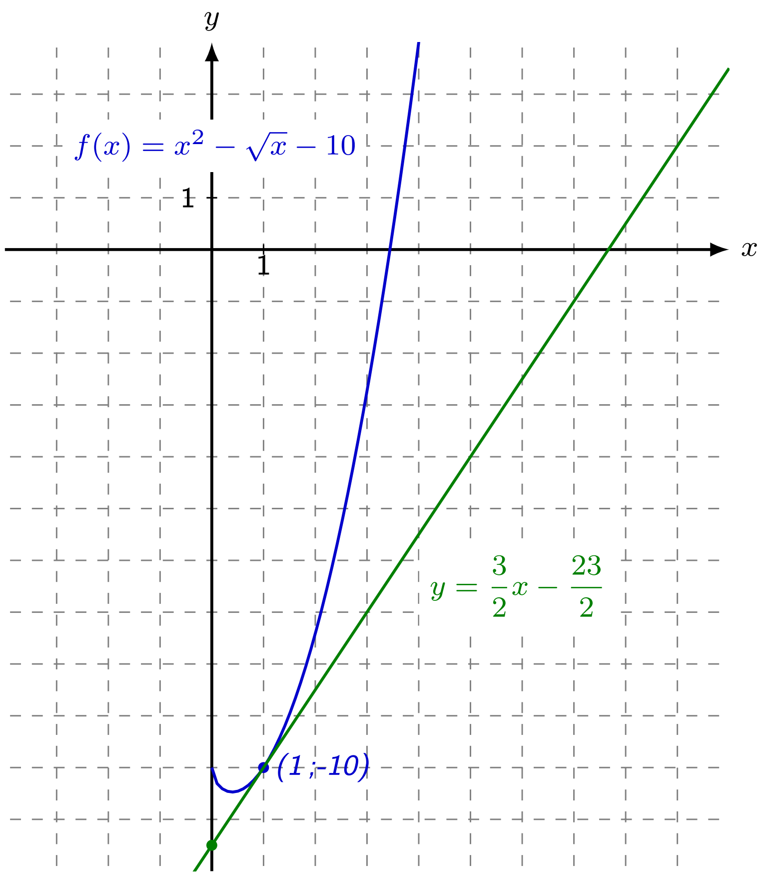
On a donc $m = \frac{3}{2}$ *et donc* $y = \frac{3}{2}x + h$.

On sait que la droite passe par le point $(1; -10)$, *on peut donc remplacer dans l'équation :*

$$\begin{array}{rrcl|l} & -10 & = & \frac{3}{2} \cdot 1 + h & -\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & -\frac{20}{2} - \frac{3}{2} & = & h & \text{CN} \\ \Leftrightarrow & -\frac{23}{2} & = & h & \end{array}$$

L'équation de la tangente est donc donnée par $y = \frac{3}{2}x - \frac{23}{2}$.

Esquisser la tangente trouvée sur le graphique ci-dessous.



<u>Exemple 1.2 (Tangente de pente donnée)</u> Soit la fonction $f(x) = x^3 - 5x + 2$. Donner tous les points du graphe de la fonction dont la pente de la tangente vaut 7. Calculer l'équation de la tangente en ces points et les placer sur le graphique.

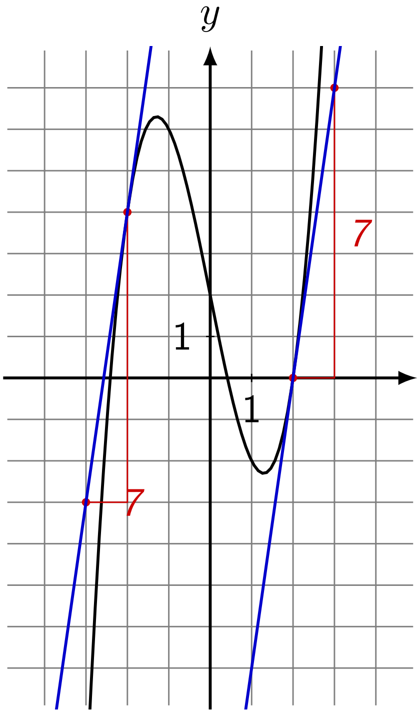
La pente de la tangente en un point étant donné par la dérivée en ce point, nous cherchons les valeurs pour lesquelles $f'(x) = 7$. On commence donc par calculer $f'(x)$:

$$f'(x) = [x^3 - 5x + 2]' = 3x^2 - 5$$

On résoud donc l'équation $f'(x) = 7$:

$$\begin{array}{rrcl|l} & 3x^2 - 5 & = & 7 & -7 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 - 12 & = & 0 & MEE \\ \Leftrightarrow & 3(x^2 - 4) & = & 0 & PR \\ \Leftrightarrow & 3(x-2)(x+2) & = & 0 & \qquad \Rightarrow S = \{-2, 2\} \end{array}$$

La dérivée vaut donc 7 quand $x = -2$ ou $x = 2$.On cherche la deuxième coordonnée de ces points :
$x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 + 2 = 0 \Rightarrow P_1(2, 0)$
$x = -2 \Rightarrow y = f(-2) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2) + 2 = 4 \Rightarrow P_2(-2, 4)$



On calcule l'équation $y = mx + h$ de la tangente au point $P_1(2, 0)$. On sait que la pente vaut 7, on a donc

$$\begin{array}{rcl|l} 0 & = & 7 \cdot 2 + h & -14, \leftrightarrow \\ h & = & -14 & \end{array}$$

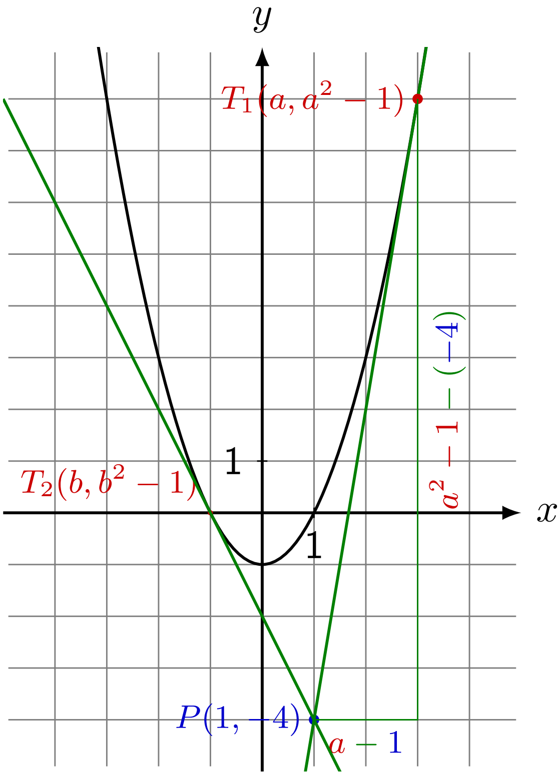
La tangente au point $P_1(2, 0)$ est donc d'équation $y = 7x - 14$.

On calcule l'équation $y = mx + h$ de la tangente au point $P_2(-2, 4)$. On sait que la pente vaut 7, on a donc

$$\begin{array}{rcl|l} 4 & = & 7 \cdot (-2) + h & +14, \leftrightarrow \\ h & = & 18 & \end{array}$$

La tangente au point $P_1(-2, 4)$ est donc d'équation $y = 7x + 18$.

Exemple 1.3 (Tangente par un point extérieur) Soit $f(x) = x^2 - 1$ une fonction. Trouver toutes les tangentes à cette fonction passant par $P(1, -4)$.



Soit $T(a, f(a))$ le point de tangence. On a $f(a) = a^2 - 1 \Rightarrow T(a, a^2 - 1)$.
On calcule la pente de la droite

$$m = \frac{a^2 - 1 - (-4)}{a - 1} = \frac{a^2 + 3}{a - 1}$$

La pente m correspond à la dérivée de la fonction f au point a ($m = f'(a)$) :

$$f'(x) = [x^2 - 1]' = 2x \Rightarrow f'(a) = 2a$$

On a donc

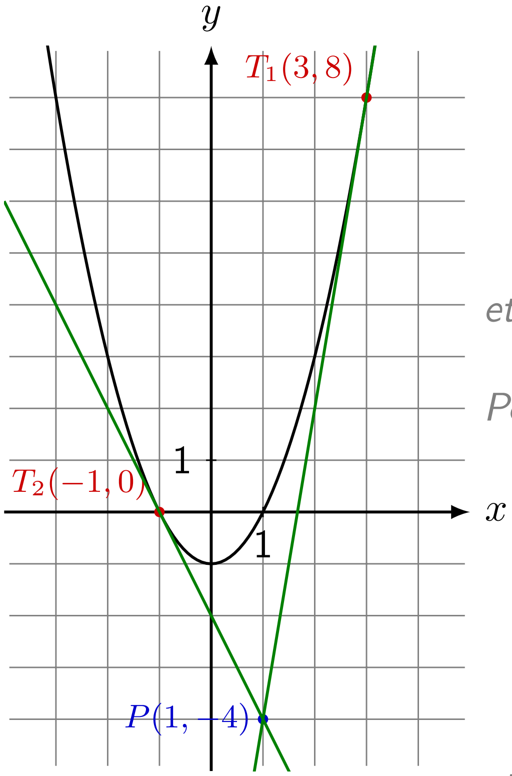
$$\begin{array}{rcl|l}
m & = & f'(a) & \\
\Rightarrow \dfrac{a^2+3}{a-1} & = & 2a & \cdot(a-1) \quad [a \neq 1] \\
\Rightarrow a^2 + 3 & = & 2a(a-1) & \text{CL} \\
\Leftrightarrow a^2 + 3 & = & 2a^2 - 2a & -a^2 - 3 \\
\Leftrightarrow 0 & = & a^2 - 2a - 3 & \text{SP}, \leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (a+1)(a-3) & = & 0 & \qquad \Rightarrow S = \{-1, 3\}
\end{array}$$

Il y a deux points de tangence, en $x = 3$ et $x = -1$.

On calcule la deuxième coordonnée de ces points :

$x = 3 \Rightarrow y = f(3) = (3)^2 - 1 = 8 \Rightarrow T_1(3, 8)$

$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow T_2(-1, 0)$



Pour $T_1(3,8)$, *on a*

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

et donc

$$\begin{array}{rrcl|l} & 8 & = & 6 \cdot 3 + h & -18, \leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & h & = & -10 & \end{array}$$

et on a donc $y = 6x - 10$.

Pour $T_1(-1,0)$, *on a*

$$f'(1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

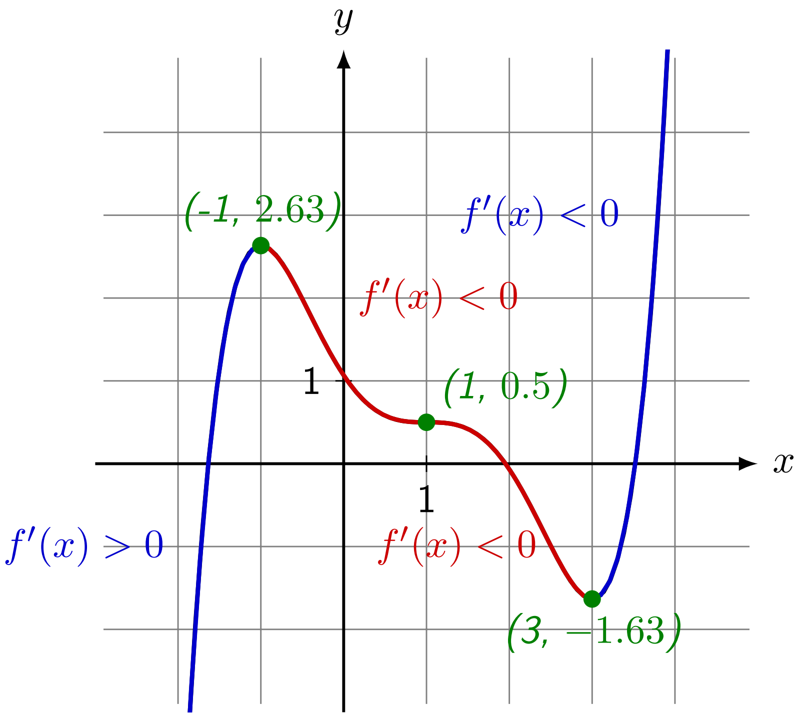
et donc

$$\begin{array}{rrcl|l} & 0 & = & (-2) \cdot (-1) + h & +2, \leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & h & = & 2 & \end{array}$$

et on a donc $y = -2x - 2$.

2. Croissance d'une fonction

Exemple 2.1 Identifier les points de la courbe pour lesquels la dérivée est nulle. Construire le tableau de croissance.



x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-1)=2.63$ MAX	↘	$f(1)=0.5$ PALIER	↘	$f(2)=-1.63$ MIN	↗	

Définition 2.1 On appelle extrema les points d'une fonction où la dérivée s'annule et change de signe. Nous appellerons les points où la dérivée s'annule mais ne change pas de signe des paliers. Plus précisément

a	$f'(a)$	Croissance
Maximum	0	↗ ↘
Minimum	0	↘ ↗
Palier	0	↘ ↘
Palier	0	↗ ↗

Exemple 2.2 Calculer les points à dérivée nulle de la fonction donnée par

$$f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2+3$$

Faire le tableau de variation et indiquer les maxima, minima et paliers.

On commence par calculer la dérivée de la fonction :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2+3\right]' \\ &= \frac{1}{5}\cdot 5x^4+\frac{1}{2}\cdot 4x^3-\frac{4}{3}\cdot 3x^2-4\cdot 2x+0 \\ &= x^4+2x^3-4x^2-8x\end{aligned}$$

On factorise la fonction pour trouver ses zéros

$$\begin{aligned}f'(x) &= x^4+2x^3-4x^2-8x = x[x^3+2x^2-4x-8] \\ &= x[x^2(x+2)-4(x+2)] = x[(x+2)(x^2-4)] \\ &= x(x+2)(x+2)(x-2) = x(x+2)^2(x-2)\end{aligned}$$

Les zéros de la dérivée sont donc -2, 0 et 2. On fait le tableau de variation de la fonction :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-2) = -\frac{11}{15}$ PALIER	$\nearrow$	$f(0) = 3$ MAX	$\searrow$	$f(2) = -\frac{139}{15}$ MIN	$\nearrow$	

$f(-2) = \frac{1}{5} \cdot (-2)^5 + \dfrac{1}{2} \cdot (-2)^4 - \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 + 3 = -\frac{11}{15}$
$f(0) = 3$
$f(2) = \frac{1}{5} \cdot (2)^5 + \dfrac{1}{2} \cdot (2)^4 - \frac{4}{3} \cdot (2)^3 - 4 \cdot (2)^2 + 3 = -\frac{139}{15}$
Graphique sur Geogebra

3. Etude de fonctions

Nous complétons notre plan d'étude d'une fonction avec l'étude de la croissance de la fonction.

Plan d'étude d'une fonction

a) Ensemble de définition
b) Zéros
c) Ordonnée à l'origine
d) Tableau de signes
e) Asymptotes verticales ou trous aux valeurs interdites
f) Asymptote horizontale ou oblique ($x \to \infty$)
g) Tableau de variation
h) Esquisse de la fonction

Exemple 3.1 Etudier la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. *ED(f)* $= \mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. Zéro en $x = 0$ ($\mathcal{Z}(0;0)$)
3. Ordonnée à l'origine $f(0) = 0$ ($H = \mathcal{Z}$)
4. Tableau de signes

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

5. AV ou trou : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \text{"}\dfrac{1}{0}\text{"} = \infty$ *AV d'équation* $x = 1$

   $\uparrow | \uparrow$

6. *AO (Deg(N) = Deg(D)+1) :* $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$

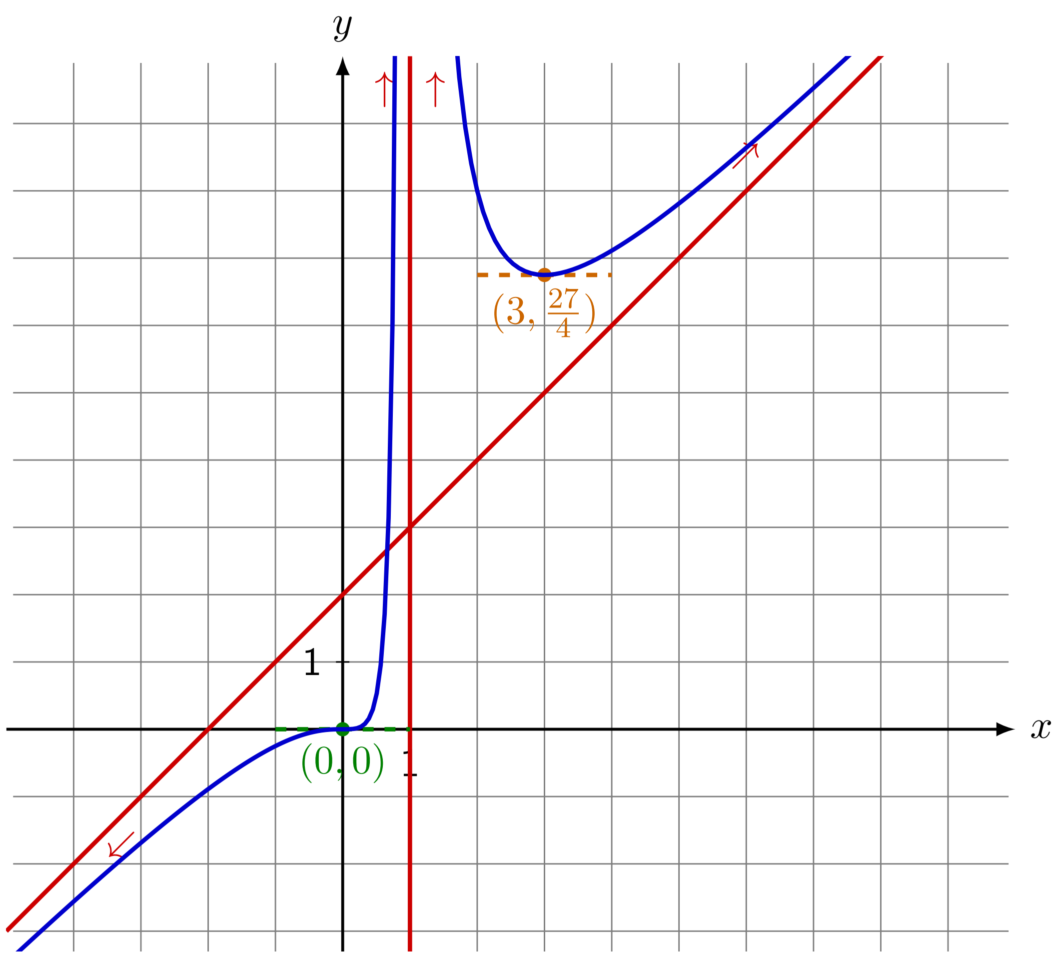
$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & -x & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & 2x^2 & -x & & \\
 & -2x^2 & +4x & -2 & \\ \cline{2-4}
 & & 3x & -2 &
\end{array}
$$

   AO d'équation $y = x + 2$, *placement*
   - $f(1000) = 1002.003 > y = 1000 + 2 = 1002$
   - $f(-1000) = -998.003 < y = -1000 + 2 = -998$

7. On calcule la dérivée

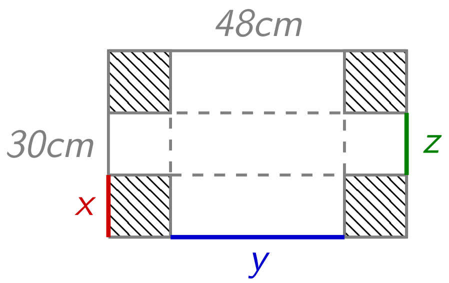
$$
\begin{aligned}
\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}\right]' &= \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{x^2(x-1)[3(x-1) - x \cdot 2]}{(x-1)^4} \\
&= \frac{x^2[3x-3-2x]}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}
\end{aligned}
$$

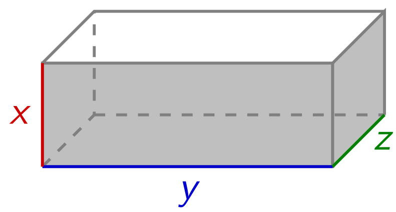
x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0 PALIER	$\nearrow$	‖	$\searrow$	$\frac{27}{4}$ MIN	$\nearrow$	



4. Optimisation

Exemple 4.1 On désire construire une boîte à partir d'un carton de dimension 30 cm $\times$ 48 cm. Trouver les dimensions de la boîte de volume maximal.





On cherche à maximiser le volume $\mathcal{V} = x \cdot y \cdot z$ avec $\overbrace{x, y, z > 0}^{\text{contraintes}}$. On peut exprimer les variables y et z en fonction de x :

$$\left.\begin{array}{l} y = 48 - 2x \text{ et } y > 0 \Rightarrow x < 24 \\ z = 30 - 2x \text{ et } z > 0 \Rightarrow < 15 \end{array}\right\} 0 < x < 15 \text{ (contrainte)}$$

Le volume est donné par : $\mathcal{V} = x \cdot y \cdot z = x(48 - 2x)(30 - 2x)$

On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles la fonction $V(x) = x(48 - 2x)(30 - 2x)$ est maximisée, c'est-à-dire les maxima de V. On développe la fonction :

$$\begin{aligned} V(x) &= x(48 - 2x)(30 - 2x) = (48x - 2x^2)(30 - 2x) \\ &= 1440x - 96x^2 - 60x^2 + 4x^3 \\ &= 4x^3 - 156x^2 + 1440x \end{aligned}$$

On calcule la dérivée :

$$V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440$$

On cherche les zéros

$$\begin{array}{rrcl|l} & 12x^2 - 312x + 1440 & = & 0 & \text{MEE} \\ \Leftrightarrow & 12(x^2 - 26x + 120) & = & 0 & \text{SP} \\ \Leftrightarrow & 12(x - 20)(x - 6) & = & 0 & \qquad \Rightarrow S = \{6, 20\} \end{array}$$

Mais $0 < x < 15$ (contrainte), on a donc $x = 6$. Il nous reste à vérifier s'il s'agit bien d'un maximum.

On fait le tableau de signes

x	0		6		15
$x-20$	$-$	t	$-$		
$x-6$	$-$	z	$+$		
$V'(x)$	$+$	z	$-$		
$V(x)$	$\nearrow$		$V(6)=3888$	$\searrow$	

C'est bien un maximum. Le volume est maximal pour :

- $x = 6$ *cm*
- $y = 48 - 2 \cdot 6 = 36$ *cm*
- $z = 30 - 2 \cdot 6 = 18$ *cm*