Corrigé Test 5 - Fonctions quadratiques

Exercice 1.

Soit f la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}$.

a) Faire l'étude de cette fonction (zéros, ordonnée à l'origine, coordonnées du sommet, axe de symétrie).

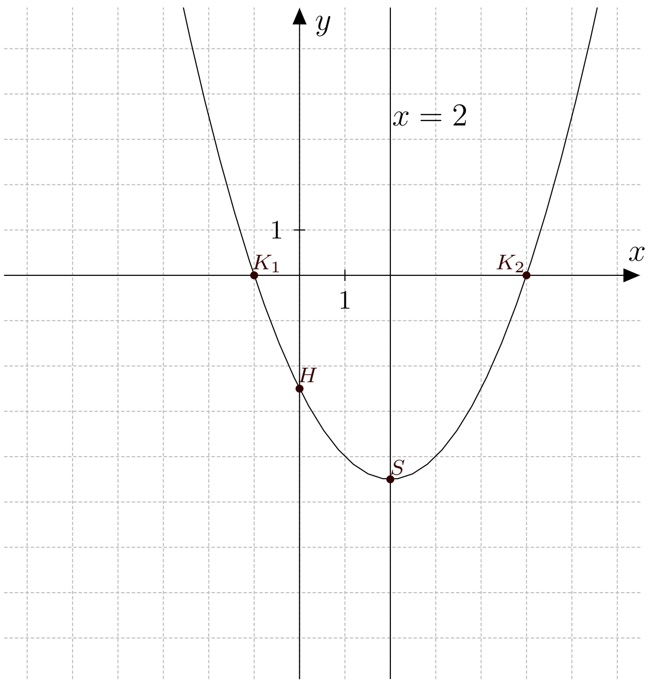
— Ordonnée à l'origine : $c = -\frac{5}{2} \Rightarrow H\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

— Zéros : On a $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 5) = \frac{1}{2}(x-5)(x+1)$, donc $K_1(-1; 0)$ et $K_2(5; 0)$.

— Sommet : Première coordonnée par la moyenne $\frac{5-1}{2} = 4$ ou par la formule $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{1} = 2$
Deuxième coordonnée : $f(2) = -\frac{9}{2}$ ou $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{2}$
$\Rightarrow S\left(2; -\frac{9}{2}\right)$

— Axe de symétrie : $x = 2$

b) Placer sur le graphique ci-dessous les éléments trouvés en a) et esquisser le graphe de la fonction.



c) Déterminer algébriquement les points d'intersection entre la parabole représentative de f et la parabole d'équation $y = -\frac{3}{2}x^2 - 6x - \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}x^2 - 6x - \frac{5}{2} &\Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x+2) = 0 \end{aligned}$$

$$S = \{-2; 0\} \text{ et } f(-2) = \frac{7}{2},\ f(0) = -\frac{5}{2}$$

Les paraboles se coupent en $I_1\left(-2; \frac{7}{2}\right)$ et $I_2\left(0; -\frac{5}{2}\right)$.

Exercice 2.

Les grenouilles font des bonds qui ont des trajectoires paraboliques. On remarque qu'un des bonds d'une grenouille suit la parabole d'équation $y = -\frac{1}{20}x^2 + 4x$, où x est la distance parcourue par la grenouille en cm.

a) Elle a commencé son saut depuis le sol, car $c = 0$.

b) La hauteur est maximale au sommet de la parabole, car elle est concave. On calcule donc les coordonnées du sommet :

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-\frac{2}{20}} = 40 \text{ et } f(40) = 80 \Rightarrow S(40; 80)$$

La hauteur maximale est égale à 80 cm (atteinte après avoir parcouru 40 cm).

c) On cherche les zéros, donc on veut résoudre $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{20}x^2 + 4x = 0 &\Leftrightarrow -x^2 + 80x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 80x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-80) = 0 \\ S &= \{0; 80\} \end{aligned}$$

La grenouille retombe au sol après avoir parcouru 80 cm.

d) On cherche à résoudre $f(x) = 35$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{20}x^2 + 4x = 35 &\Leftrightarrow -x^2 + 80x = 700 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 80x - 700 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 6400 - 2600 = 3600 \Rightarrow x_1 = \frac{80-60}{2} = 10 \text{ et } x_2 = \frac{80+60}{2} = 70$$

$$S = \{10; 70\}$$

La grenouille se trouve à 35 cm du sol après avoir parcouru 10 cm et 70 cm. Ces positions sont donc séparées de 60 cm.

Exercice 3.

Au bord d'une rivière, Pierre veut construire un enclos rectangulaire pour ses vaches. Il a 100 mètres de barrière à disposition et seuls les trois côtés ne jouxtant pas la rivière doivent être fermés. Quelles sont les dimensions de l'enclos pour avoir une surface maximale pour les vaches ?
Soient x la longueur et y la largeur de l'enclos. On a $2x + y = 100$, donc $y = 100 - 2x$. On peut alors définir la surface par la fonction

$$A(x) = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x.$$

L'aire maximale se trouve au sommet de la parablole, car elle est concave, donc lorsque la longueur est égale à

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-100}{-4} = 25.$$

Ainsi, l'aire est maximale si la longueur est égale à $x = 25$ mètres et la largeur est égale à $y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$ mètres.