ꕥ Probabilité ꕥ

1 Expérience aléatoire

Définition 1 : Expérience aléatoire
C'est une expérience ayant plusieurs issues possibles mais dont on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.

Définition 2 : Univers des résultats Noté Ω, c'est l'ensemble des issues (ou éventualités) de l'expérience aléatoire.

Exemple 1 : Lancer une pièce de monnaie : $\Omega = \{ \text{P} ; \text{F} \}$

Exemple 2 : Lancer un dé : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$

Définition 3 : Loi de probabilité
Définir une loi de probabilité sur $\Omega = \{ x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n \}$, c'est associer à chaque issue x_i un nombre positif p_i tel que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Le nombre p_i est appelé la probabilité de l'événement x_i.

2 Modéliser une expérience aléatoire

Pour modéliser une expérience aléatoire, on choisit une loi de probabilité sur Ω qui représentera au mieux les chances de réalisation de chaque issue.
Les valeurs choisies pour la loi de probabilité doivent correspondre aux fréquences que l'on obtiendrait en faisant des simulations avec des échantillons de grande taille.

Exemple 3 : Lancer deux pièces de monnaie : $\Omega = \{ \text{PP} ; \text{PF} ; \text{FF} \}$

$p(\text{PP}) = 0,25$; $p(\text{PF}) = 0,5$; $p(\text{FF}) = 0,25$.

Simulation de 65000 lancers de deux pièces

x_i	PP	PF	FF
f_i	0,249	0,503	0,248

Loi de probabilité

x_i	PP	PF	FF
p_i	0,25	0,5	0,25

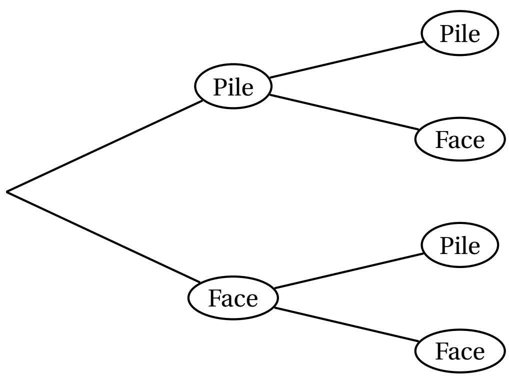
Remarque 1 : On a, pour tout i, $0 \leq p_i \leq 1$.

Définition 4 : équiprobabilité
Dans le cas où l'on associe à toutes les éventualités la même probabilité p, on dit que la loi est équirépartie.
On a alors, pour tout i, $p_i = p = \dfrac{1}{n}$.

3 Méthodes de dénombrement

3.1 Dénombrement avec un arbre

Retour sur l'exemple 3 : On lance deux pièces de monnaies indiscernables :



Au vu de ce dessin, il apparaît clairement que, si les deux pièces sont indiscernables, nous avons :

- $\Omega = \{ \text{PP} ; \text{PF} ; \text{FF} \}$

et

- $p(\text{PP}) = 0,25$; $p(\text{PF}) = 0,5$; $p(\text{FF}) = 0,25$.

3.2 Dénombrement avec un tableau à double entrée

Exemple 4 : On lance deux dés et on calcule la somme des deux nombres obtenus.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

d'où les probabilités :

$p(\text{S} = 2) = p(\text{S} = 12) = \dfrac{1}{36}$

$p(\text{S} = 3) = p(\text{S} = 11) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$p(\text{S} = 4) = p(\text{S} = 10) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

$p(\text{S} = 5) = p(\text{S} = 9) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

$p(\text{S} = 6) = p(\text{S} = 8) = \dfrac{5}{36}$

$p(\text{S} = 7) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

3.3 Diagramme de Venn, diagramme de Caroll

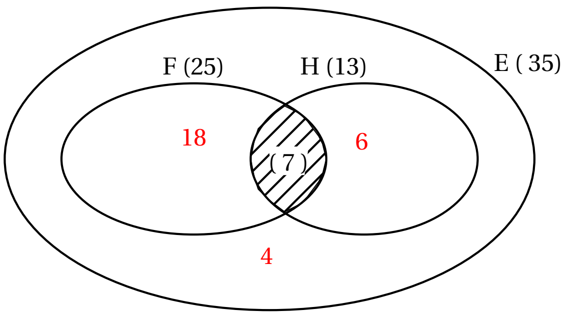
John venn (1834-1923) Lewis Caroll (Charles Lutwidge Dodgon 1832-1898)

Exemple 5 : Dans une classe de 35 élèves, 25 d'entre eux jouent au football, 13 d'entre eux jouent au handball, 7 d'entre eux jouent à la fois au football et au handball.

1. Représenter par un diagramme l'ensemble E des élèves de la classe et l'ensemble F des élèves qui jouent au handball.
2. Quel est le nombre d'élèves qui jouent seulement au football ?
3. Quel est le nombre d'élèves qui jouent seulement au handball ?
4. Quel est le nombre d'élèves qui jouent à l'un des deux sports ?
5. Quel est le nombre d'élèves qui ne jouent ni au football, ni au handball ?

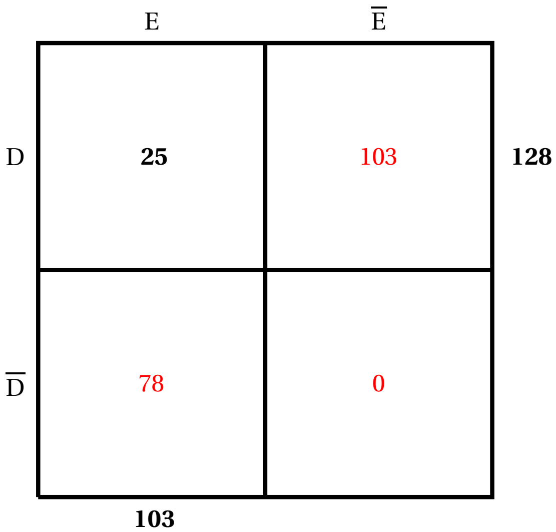
Réponses :

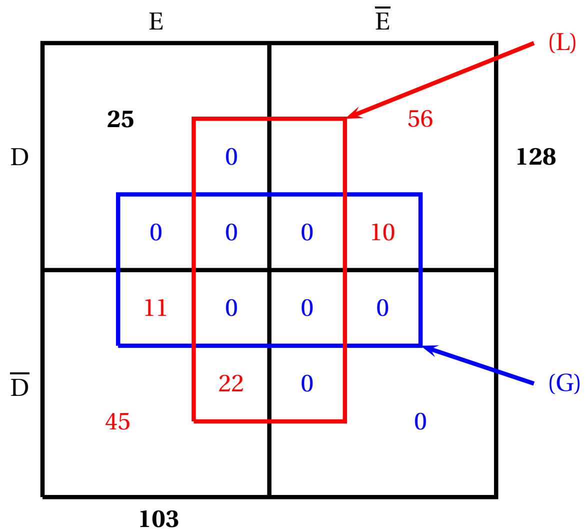
1. 18 élèves jouent seulement au football.
2. 6 élèves jouent seulement au handball.
3. 31 élèves jouent à l'un des deux sports.
4. 4 élèves ne jouent ni au football, ni au handball.



Exemple 6 : 206 élèves de seconde suivent des cours d'anglais (en première ou seconde langue). Ils suivent aussi des cours dans une ou deux autres langues :
128 font de l'allemand, 103 font de l'espagnol, 59 du latin, 21 du grec 25 de l'allemand et de l'espagnol, 37 de l'allemand et du latin et 11 de l'espagnol et du grec.

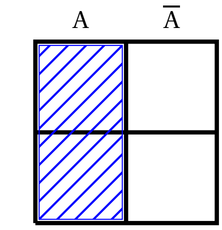
1. Dans cette question, on ne s'intéresse qu'à l'allemand et à l'espagnol.
   (a) Faire un diagramme de venn.
   (b) Combien d'élèves ne font ni allemand, ni espagnol ?
2. (a) Faire un diagramme de Caroll incluant toutes les données.
   (b) Combien d'élèves font du latin et de l'espagnol ?
   (c) Combien d'élèves ne font que de l'allemand ?

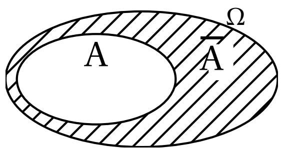




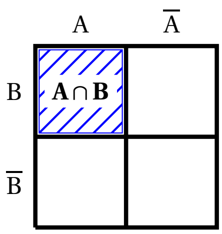
3.4 Intersection, réunion et contraire d'événements

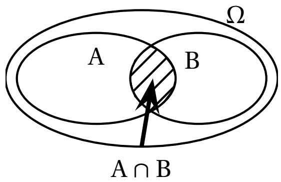
Définition 5 :
L' événement contraire de l'événement A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note $\overline{A}$



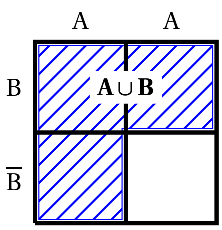


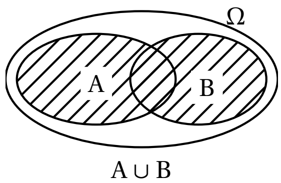
Définition 6 : Intersection
L'intersection des événements A et B est l'événement noté $A \cap B$, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A <u>et</u> l'événement B, c'est à dire les deux.
$A \cap B$ se lit " A inter B ".





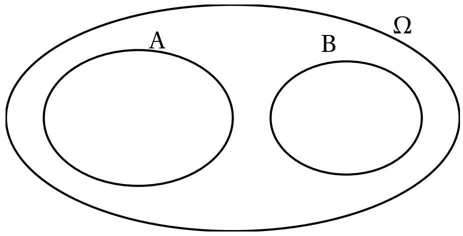
Définition 7 : Réunion
La réunion des événements A et B est l'événement noté $A \cup B$, formé des issues qui réalisent l'événement A <u>ou</u> l'événement B, c'est à dire au moins l'un des deux.
$A \cup B$ se lit " A union B ".





4 Calculs des probabilités

Définition 8 :
Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.
On a alors $A \cap B = \emptyset$ et $p(A \cap B) = 0$.

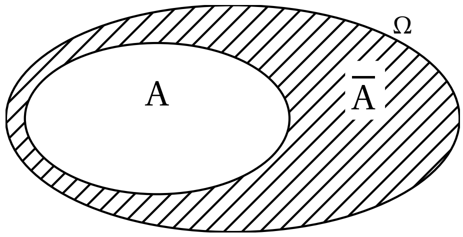


Propriété 1 :
Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriété 2 : Dans le cas général

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.



Définition 9 :
L' événement contraire de l'événement A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note $\overline{A}$

Propriété 3 : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$