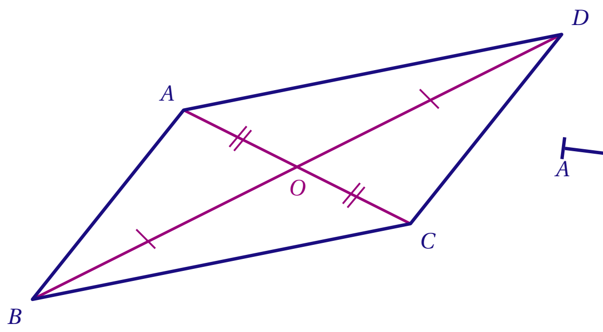
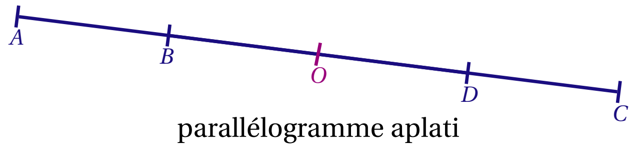
I NOTION DE VECTEUR

1 PARALLÉLOGRAMME

DÉFINITION

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si ses diagonales ont le même milieu





parallélogramme aplati

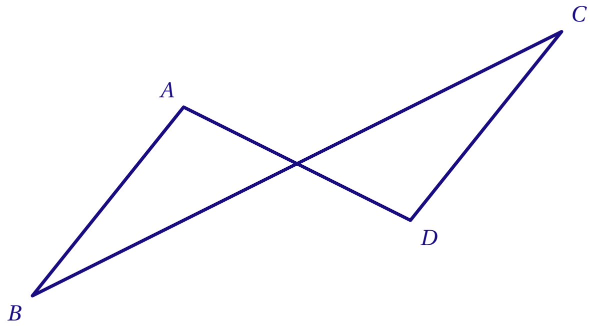
PROPRIÉTÉS

— Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si $(AB)//(DC)$ et $(AD)//(BC)$.

— Dans un parallélogramme les côtés opposés ont la même longueur.

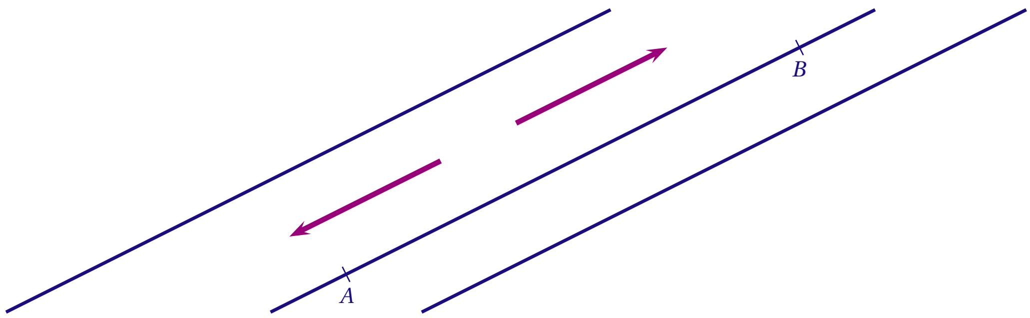
REMARQUE

Dire que dans un quadrilatère, il y a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ne suffit pas pour conclure que ce quadrilatère est un parallélogramme.



Dans le quadrilatère $ABCD$ nous avons $(AB)//(CD)$ et $AB = CD$, pourtant $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

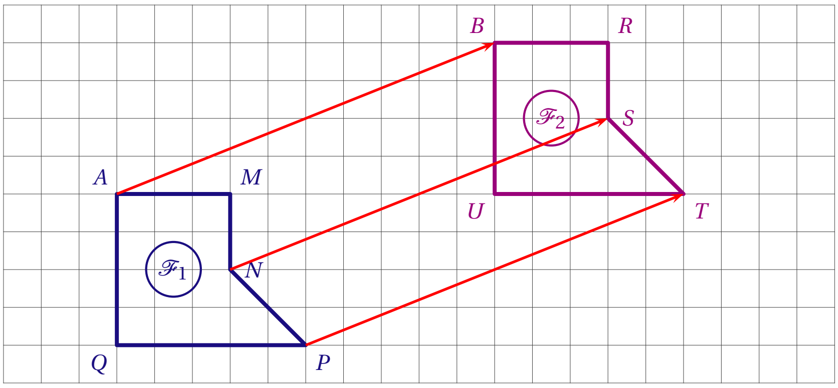
2 SENS ET DIRECTION



— Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont même direction.

— Une direction étant indiquée par la donnée d'une droite (AB), il y a deux sens de parcours dans cette direction : soit de A vers B, soit de B vers A.

3 TRANSLATION



Le glissement qui permet d'obtenir la figure $\mathscr{F}_2$ à partir de la figure $\mathscr{F}_1$ peut être décrit de façon précise par trois caractères :

— la *direction* du glissement est donnée par la droite (AB) ;
— le *sens* du glissement est celui de A vers B ;
— la *distance* du glissement est égale à la longueur du segment $[AB]$.

On dit que la figure $\mathscr{F}_2$ est l'image de la figure $\mathscr{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

REMARQUE

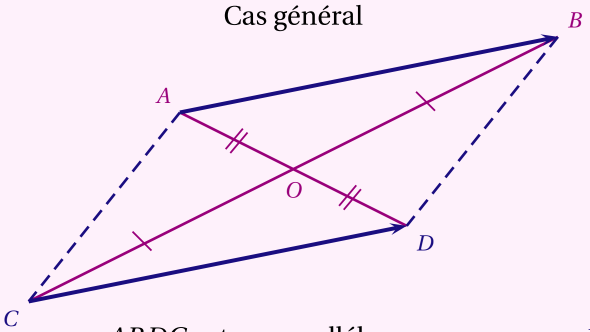
Les vecteur $\overrightarrow{NS}$ et $\overrightarrow{PT}$ sont aussi des vecteurs de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on dit qu'ils sont égaux. On note alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{PT}$$

DÉFINITION

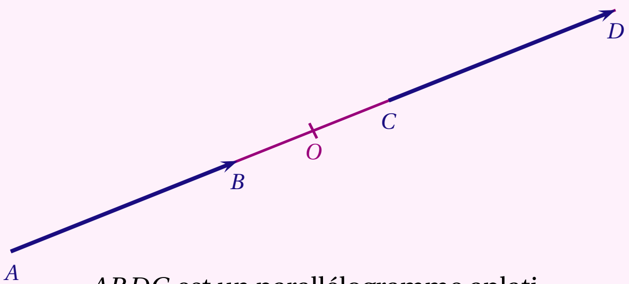
Soient A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.
Cette translation est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Cas général



$ABDC$ est un parallélogramme

Cas particulier où A, B et C sont alignés



$ABDC$ est un parallélogramme aplati

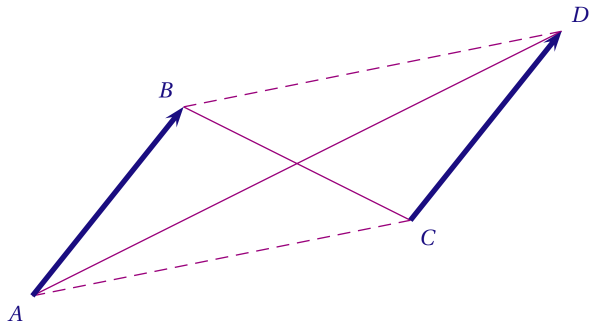
II VECTEURS

Un couple (A,B) de points du plan détermine un vecteur. A est l'origine du vecteur et B est son extrémité. On le note $\overrightarrow{AB}$.

1 ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation.

DÉFINITION



A, B, C et D sont quatre points du plan. Les définitions suivantes sont équivalentes :

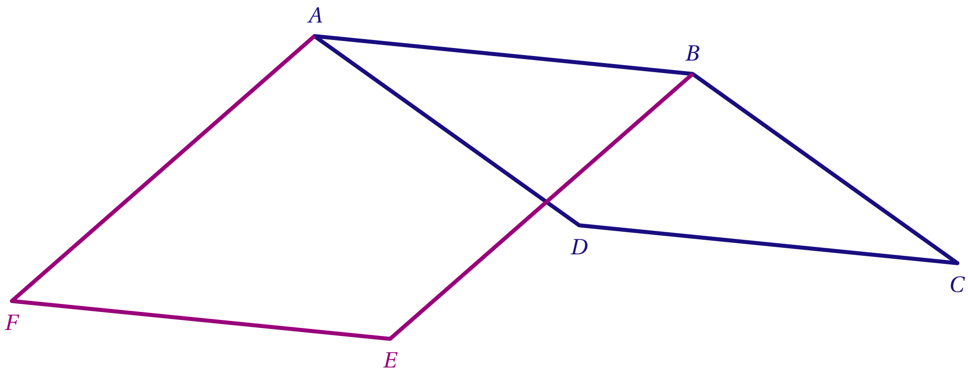
— $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

— $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

— $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

EXEMPLE : LES TROIS PARALLÉLOGRAMMES

$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrons que $DCEF$ est un parallélogramme.



— $ABCD$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

— $ABEF$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}$ donc le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.

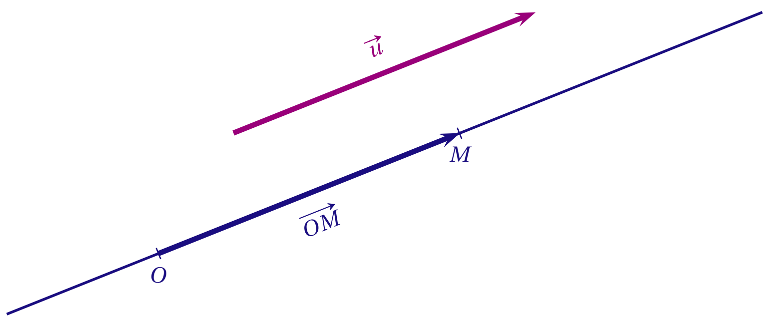
2 REPRÉSENTATION D'UN VECTEUR

Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\cdots$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FE}$, … sont des représentants du vecteur $\vec{u}$:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\cdots$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\cdots$ est appelé le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un un point M unique tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.



Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, les points O et M sont distincts. Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :

— Sa direction : c'est celle de la droite (OM).

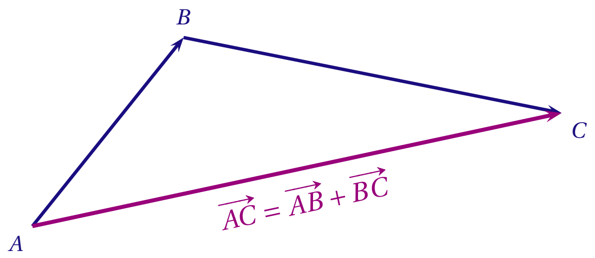
— Son sens : c'est le sens de O vers M.

— Sa norme notée $\|\vec{u}\|$: c'est la distance OM.

III ADDITION VECTORIELLE

1 SOMME DE DEUX VECTEURS

Soit trois points A, B et C.
Si on applique la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, on obtient la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$



RELATION DE CHASLES

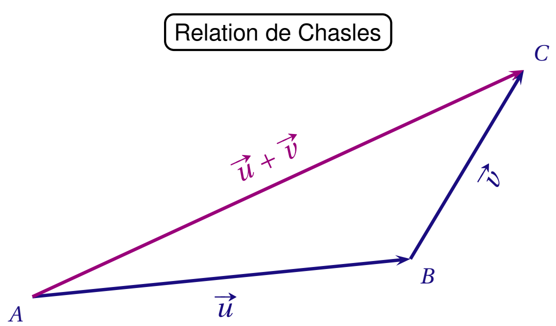
Quels que soient les points A, B et C on a :

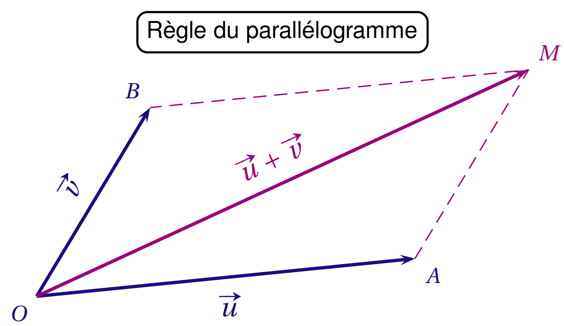
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

La somme $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $OAMB$ est un parallélogramme.

CONSTRUCTION DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS





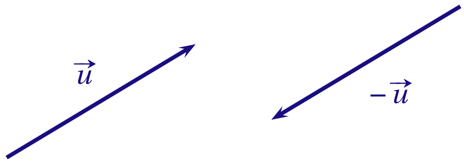
PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$; $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{u}+\vec{w})$

2 DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

OPPOSÉ D'UN VECTEUR

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $\left(-\vec{u}\right)$ tel que $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$.



CONSÉQUENCE

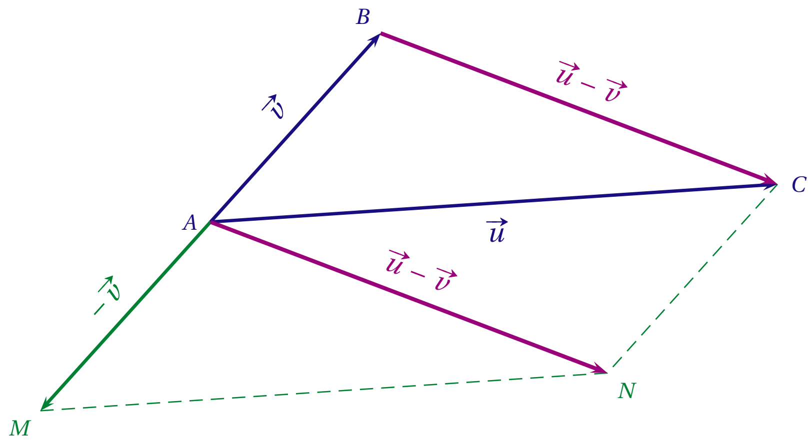
L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

✼ PREUVE

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

DÉFINITION

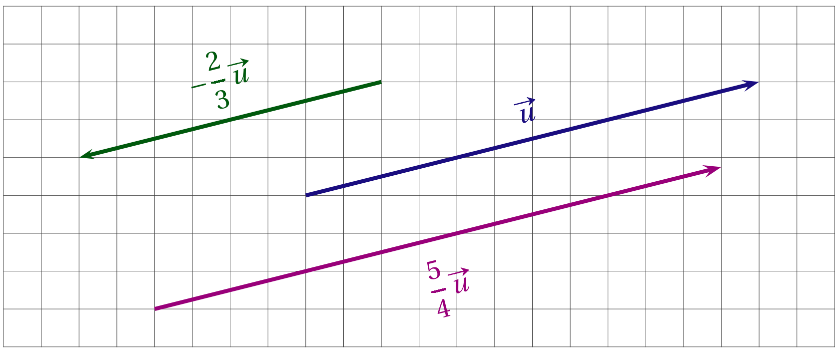
Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la différence $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$.



Quels que soient les points A, B et C, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

IV MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

1 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL k

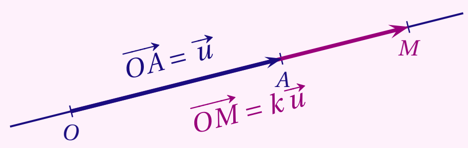


DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, noté $k\vec{u}$ est le vecteur caractérisé par :

— sa direction : $k\vec{u}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$;

$\boxed{\text{Cas où } k > 0}$

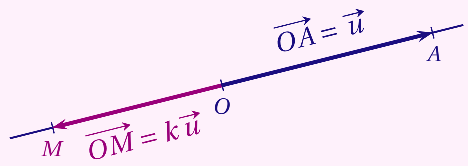


— son sens : le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$;

— sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par le réel k

$$\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$$

$\boxed{\text{Cas où } k < 0}$



— son sens : le vecteur $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur $\vec{u}$;

— sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par l'opposé du réel k

$$\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ et se lit :
« la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par la valeur absolue du réel k »

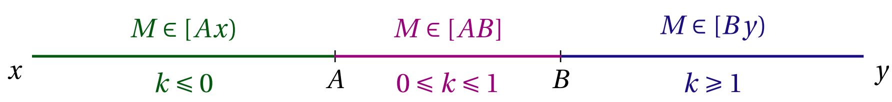
Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on convient que $k\vec{u} = \vec{0}$: ainsi, l'égalité $k\vec{u} = \vec{0}$ ne peut se produire que lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$.

REMARQUE

Soit A et B deux points distincts, et k un réel donné. Il existe un unique point M défini par la relation $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$:

— M est un point de la droite (AB)

— M a pour abscisse k dans le repère $(A;B)$ d'origine A



2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' :
$k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$; $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$; $k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$

3 VECTEURS COLINÉAIRES

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

REMARQUES

— Comme $\vec{0} = 0\vec{u}$, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

— Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

4 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC LES MILIEUX

MILIEU D'UN SEGMENT

Étant donné un segment $[AB]$. Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu I du segment $[AB]$:

1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou 2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou 3) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

4) Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

DÉMONSTRATION

1. L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ caractérise le milieu I du segment $[AB]$ (conséquence de la définition de l'égalité de deux vecteurs).
2. I milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
3. I milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \iff 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$
4. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}} = 2\overrightarrow{MI}$$

Réciproquement, la propriété $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ étant vraie pour tout point M on peut l'appliquer au point I. Soit :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{II} = \vec{0}$$

Ce qui prouve que I est le milieu du segment $[AB]$

THÉORÈME

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ alors $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

DÉMONSTRATION

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$$

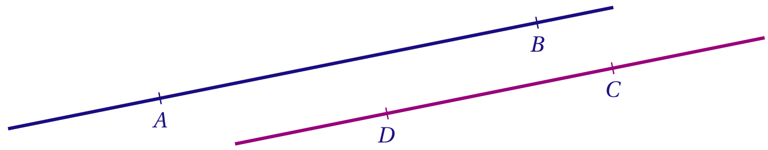
PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

— Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

DÉMONSTRATION

— Si $(AB)//(CD)$ alors, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction donc ils sont colinéaires.



Réciproquement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors, ils ont la même direction donc $(AB)//(CD)$

— $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires signifie donc $(AB)//(AC)$. Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

EXEMPLES

EXEMPLE 1 : CONSTRUCTION DE POINTS

La méthode pour construire un point M défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

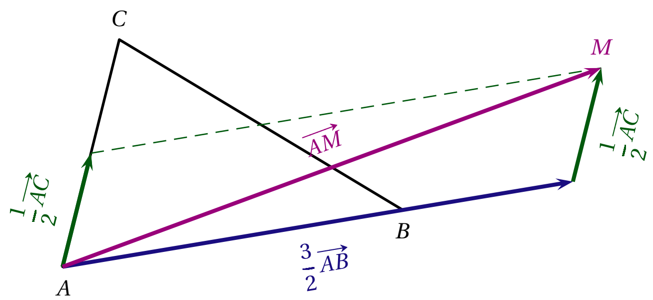
$$\underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\text{origine connue}} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

Soit trois points non alignés A, B et C. Construire le point M défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$

— Choisissons par exemple A comme « *origine connue* »

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}\\ &\iff \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\\ &\iff -2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\ &\iff \overrightarrow{MA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &\iff \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

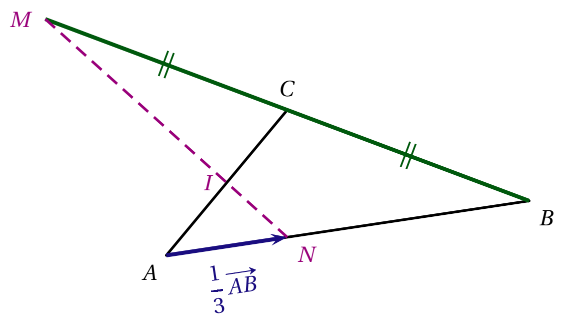
— Nous pouvons construire le point M :



EXEMPLE 2 : PARALLÉLISME, ALIGNEMENT

Montrer que des points sont aligné, ou sont sur des droites parallèles, revient à montrer que des vecteurs sont colinéaires.

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AC]$, M est le symétrique de B par rapport à C et le point N est tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *. Les points M, I et N sont-ils alignés ?*



— I est le milieu du segment $[AC]$ donc $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

— M est le symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu du segment $[BM]$ d'où $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$.

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

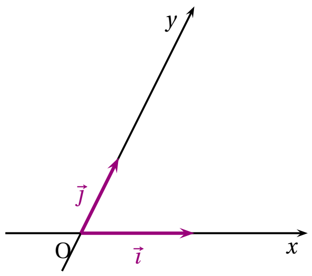
Ainsi, $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{MI}=3\overrightarrow{IN}$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont colinéaires donc les points M, I et N sont alignés.

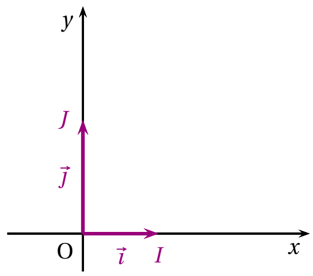
V COORDONNÉES

1 REPÈRE DU PLAN

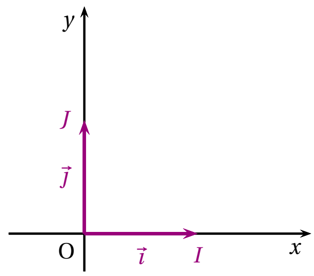
On appelle base tout couple $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires.
Un repère du plan est un triplet $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où O est un point du plan (appelé origine du repère) et $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base.



Repère quelconque



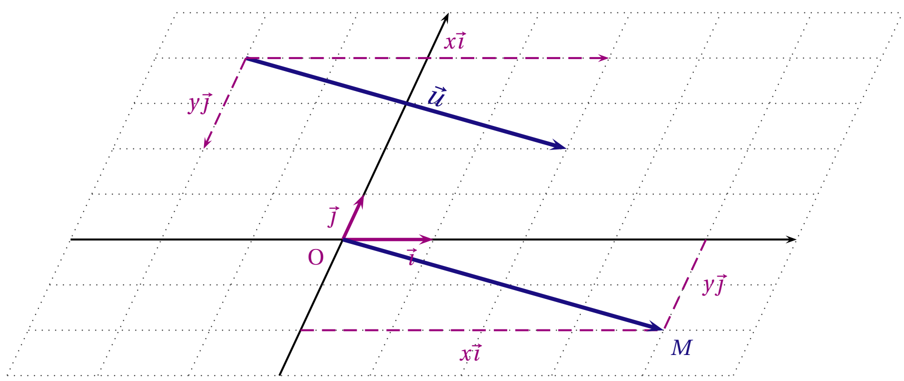
Repère orthogonal
$(OI)\perp(OJ)$



Repère orthonormé
$(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

2 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point $M(x;y)$ dans le repère $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}M}=\vec{u}$.
On note indifféremment $\vec{u}(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



— $(x;y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ signifie que $\overrightarrow{\mathrm{O}M}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.

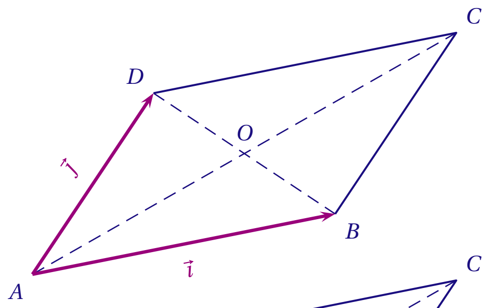
— $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ signifie que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.

REMARQUE

Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix du repère.

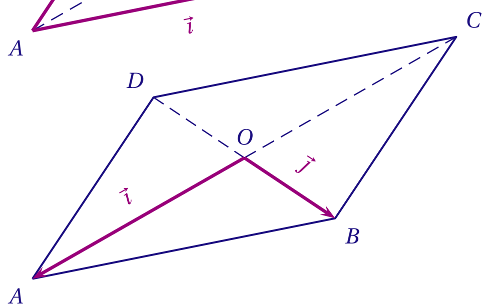
EXEMPLE

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.



— Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$:

$A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$



— Dans le repère $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$:

$A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉS DES COORDONNÉES

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs :

— $\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à $x=0$ et $y=0$.

— $\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à $x=x'$ et $y=y'$.

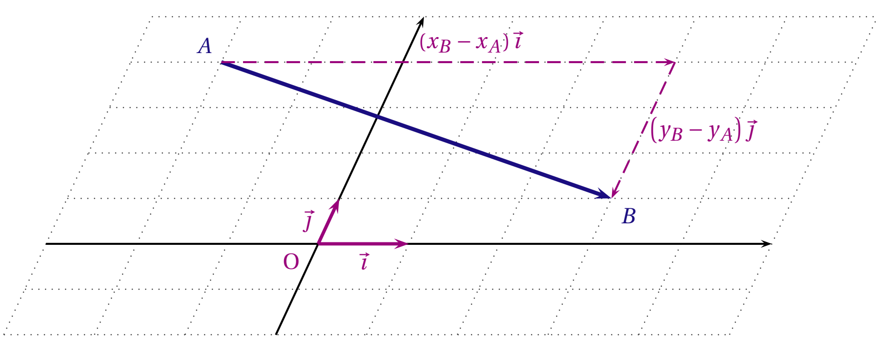
— Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

— pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

3 COORDONNÉES DU VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.



✼ DÉMONSTRATION

D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

4 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soit $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu $I(x_I; y_I)$ du segment $[AB]$ sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

✼ DÉMONSTRATION

I est le milieu du segment $[AB]$ d'où $2\overrightarrow{\mathrm{O}I} = \overrightarrow{\mathrm{O}A} + \overrightarrow{\mathrm{O}B}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{O}I} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{O}A} + \overrightarrow{\mathrm{O}B}\right)$

5 CONDITION DE COLINÉARITÉ

Soit $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0$$

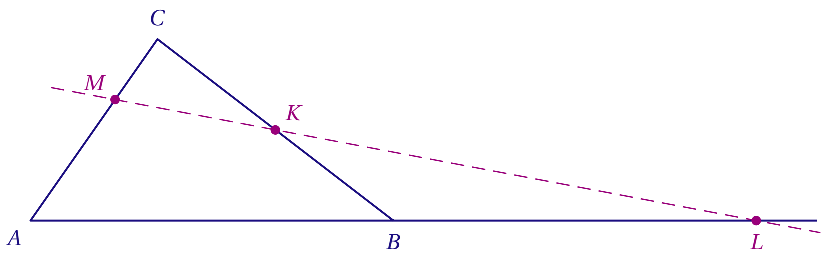
✼ DÉMONSTRATION

— Dans le cas où l'un des deux vecteurs est nul, les vecteurs sont colinéaires et la relation $xy' - x'y = 0$ est vérifiée car $x = y = 0$ ou $x' = y' = 0$.

— Dans le cas où les deux vecteurs sont non nuls, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{v}$. Soit $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ ce qui équivaut à $xy' - x'y = 0$.

EXEMPLE

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, K est le milieu de $[BC]$, L est le symétrique du point A par rapport à B.
Déterminer la position du point M sur la droite (AC) pour que les points K, L et M soient alignés.



Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

— Les coordonnées du point K milieu du segment $[BC]$ sont $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

— L est le symétrique du point A par rapport à B donc $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du point L sont $L(2;0)$.

— M est un point de la droite (AC) donc $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC}$ d'où M a pour coordonnées $M(0; y)$.

Les points K, L et M sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} x_K - x_L \\ y_K - y_L \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - 2 \\ \dfrac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix} x_M - x_L \\ y_M - y_L \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 0-2 \\ y-0 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix} -2 \\ y \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires pour y solution de l'équation :

$$-\frac{3}{2} \times y - (-2) \times \frac{1}{2} = 0 \iff -\frac{3}{2} \times y = -1 \iff y = \frac{2}{3}$$

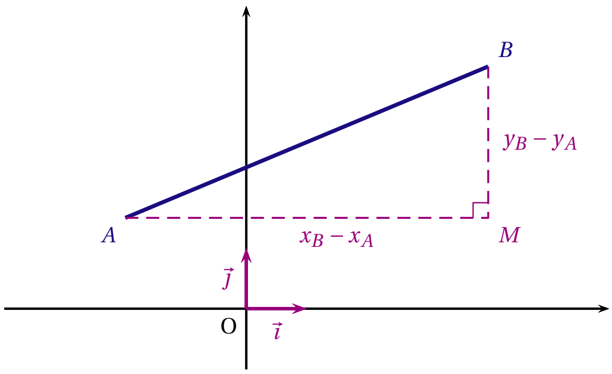
Ainsi, M est le point de la droite (AC) tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

6 DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soient $A\left(x_A; y_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B\right)$ deux points du plan muni d'un repère *orthonormal* $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la distance AB est donné par

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$

✻ DÉMONSTRATION



Comme $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormal, le triangle AMB est un triangle rectangle en M.
D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AM^2 + MB^2$$

$$\text{Soit } AB^2 = \left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$$

$$\text{d'où } AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$

EXEMPLE

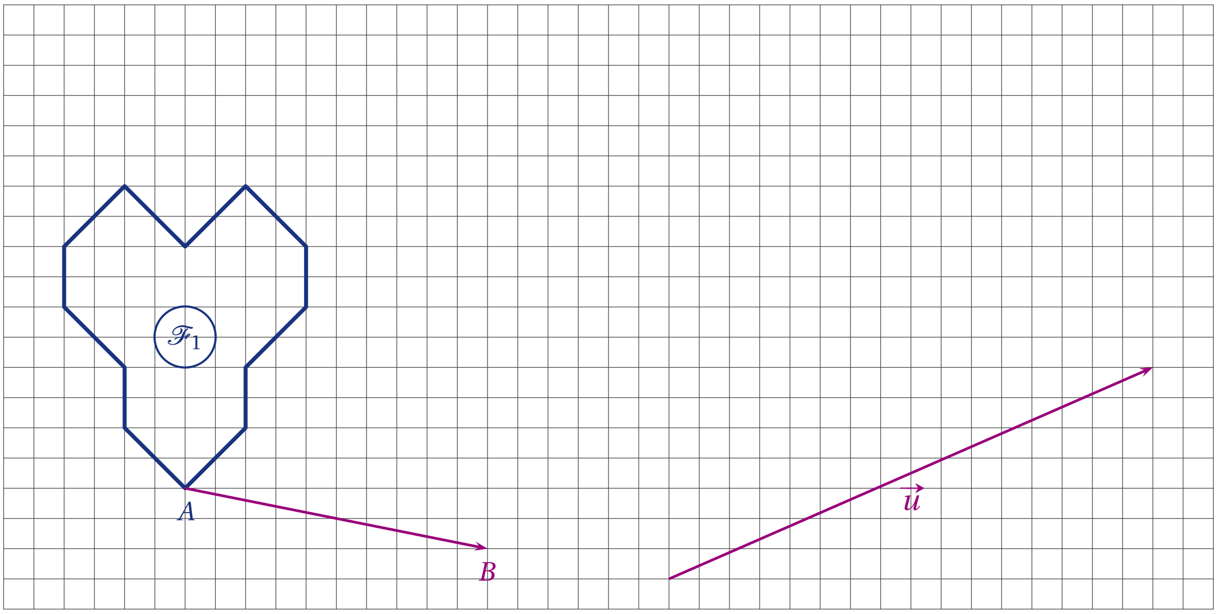
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère les points $A(-1; -2)$, $B(2; 2)$ et $C(-2; 5)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Calculons les longueurs des trois côtés du triangle ABC :

— $AB = \sqrt{(2-(-1))^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
— $AC = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
— $BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

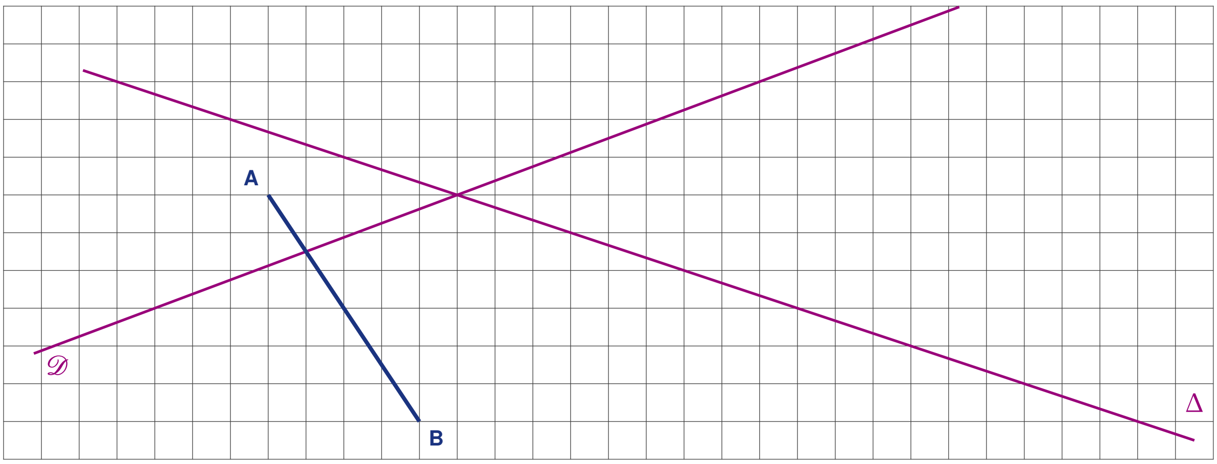
Nous avons $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
En outre $AB = BC$ donc ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

EXERCICE 1



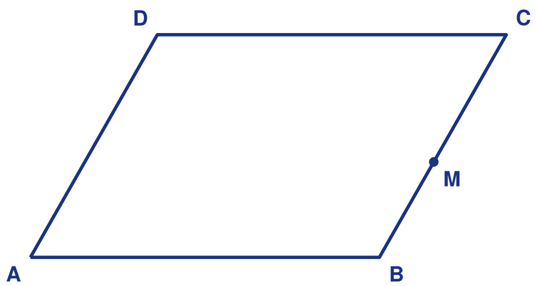
1. Tracer la figure $\mathscr{F}_2$ image de la figure $\mathscr{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Tracer la figure $\mathscr{F}_3$ image de la figure $\mathscr{F}_2$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

EXERCICE 2



Construire un point E sur la droite Δ et un point F sur la droite $\mathscr{D}$ de façon que $ABEF$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 3



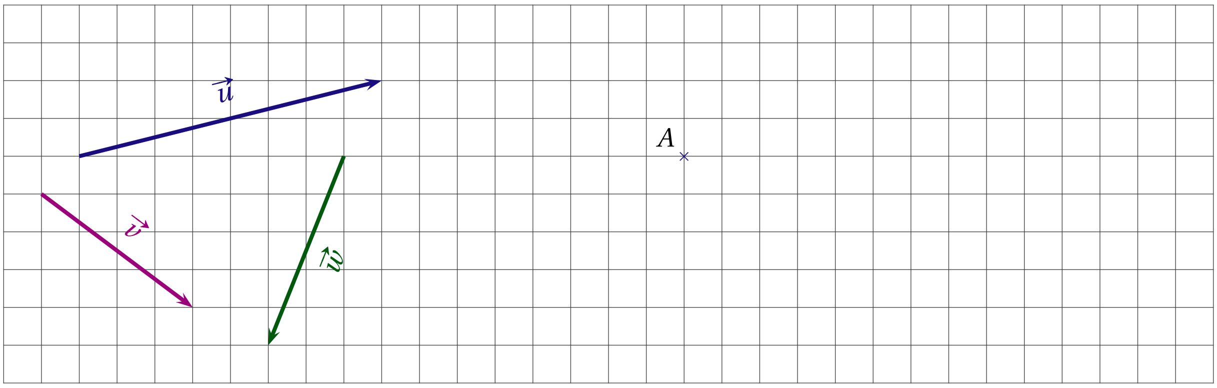
$ABCD$ est un parallélogramme. M est un point du segment $[BC]$.

1. Construire le point N tel que le quadrilatère $AMNB$ soit un parallélogramme.

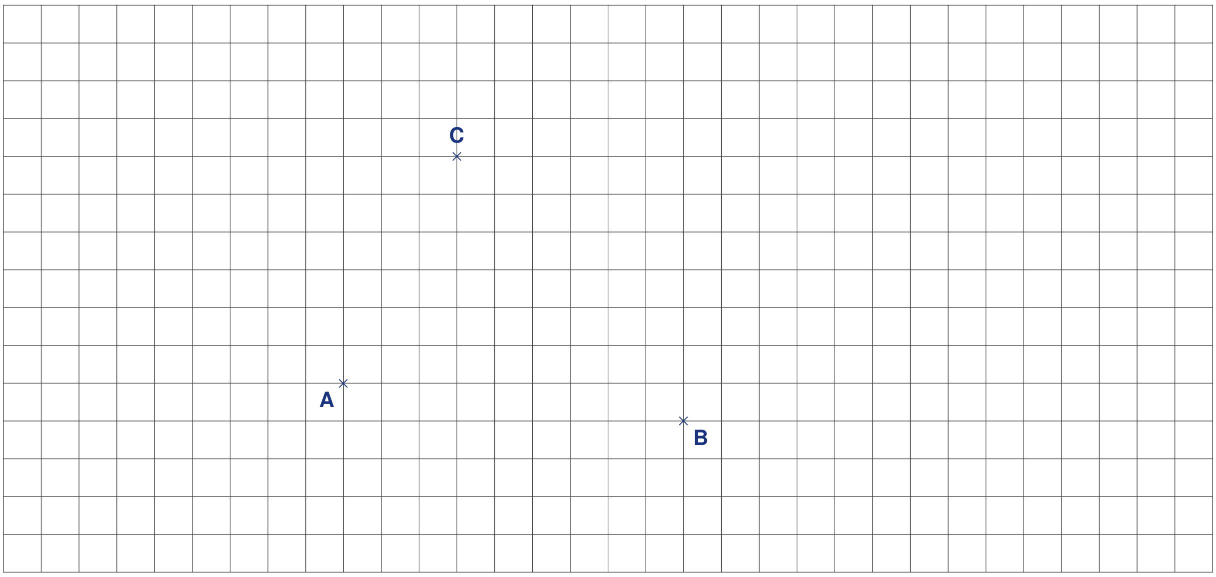
2. Montrer que les segments $[CM]$ et $[DN]$ ont le même milieu.

EXERCICE 4

Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{w} - \vec{v}$



EXERCICE 5



1. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que B est le milieu du segment $[AN]$.

EXERCICE 6

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
2. En déduire que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

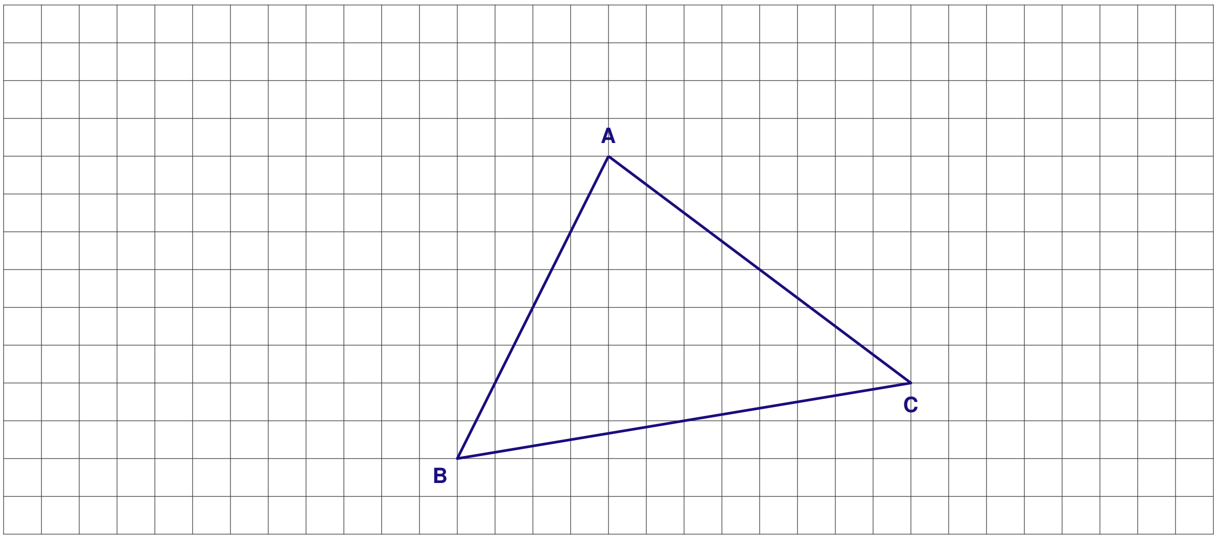
EXERCICE 7

Soit un triangle ABC. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 8

1. Soit M le point du plan tel que $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Construire le point M dans la figure ci-dessous.

2. Construire le point N tel que $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{CN}$.
3. Les points A, M et N sont-ils alignés ?



EXERCICE 9

Soit un triangle ABC et les milieux I, J, et K des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

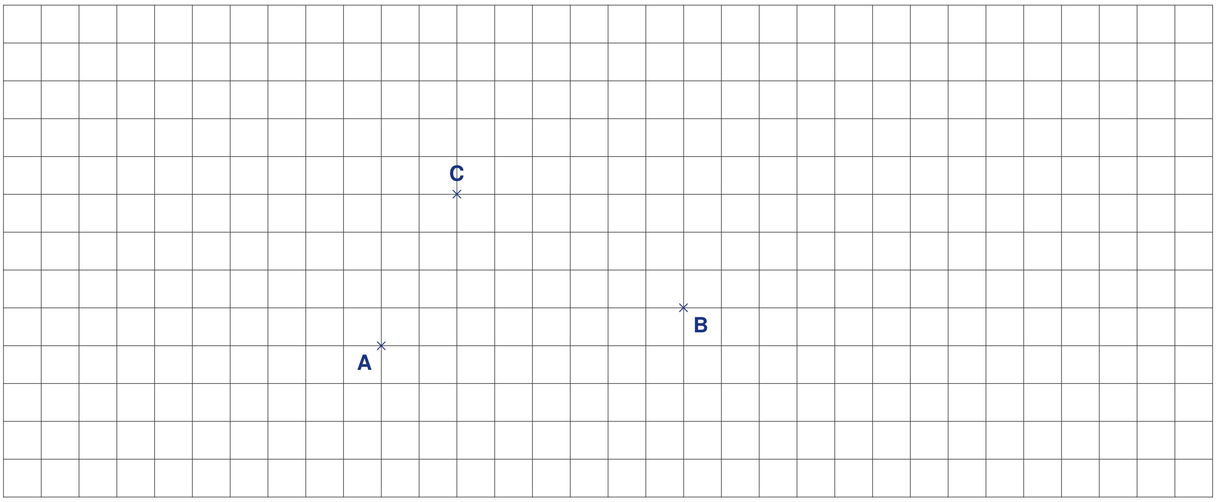
1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AB}$.
2. Les droites (MN) et (IJ) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 10

$ABCD$ est un parallélogramme.

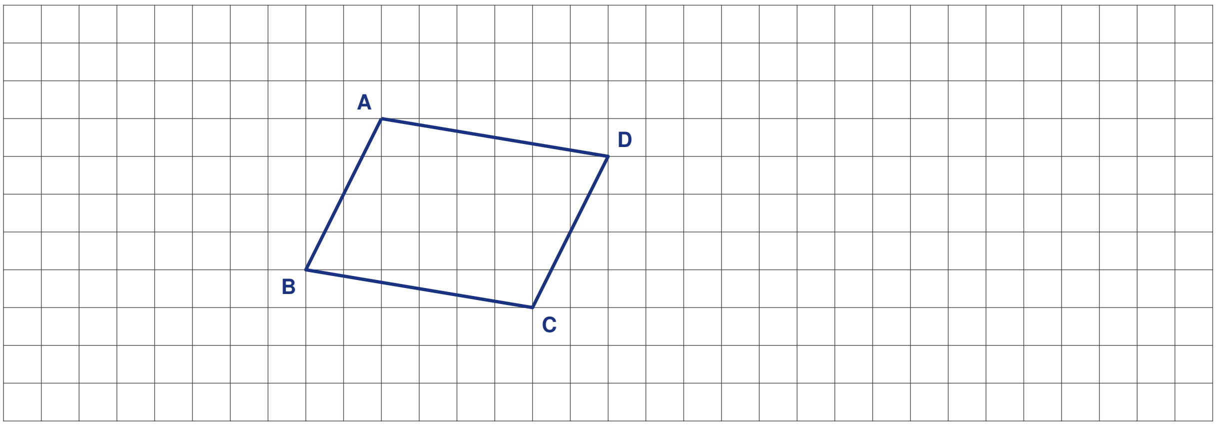
1. Placer les points E et F définis par les égalités : $\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}$
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

EXERCICE 11



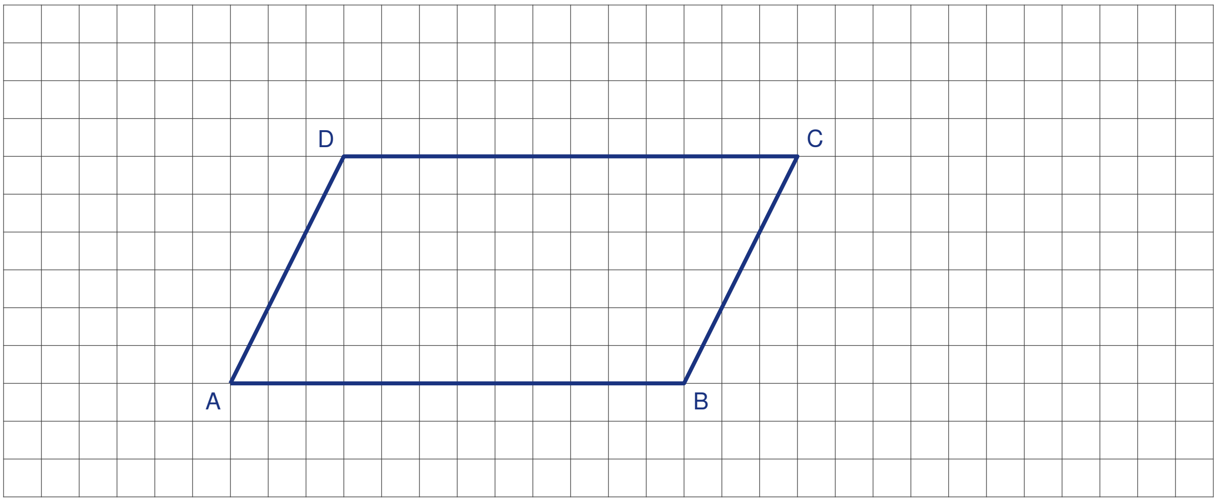
1. Placer les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que les droites (MN) et (AP) sont parallèles.

EXERCICE 12



1. $ABCD$ est un parallélogramme. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire que les points E, C et F sont alignés.

EXERCICE 13



$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Placer les points E, F et G tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Les points E, F et G sont-ils alignés ?

EXERCICE 14

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Les droites (AM) et (BN) sont-elles parallèles ?

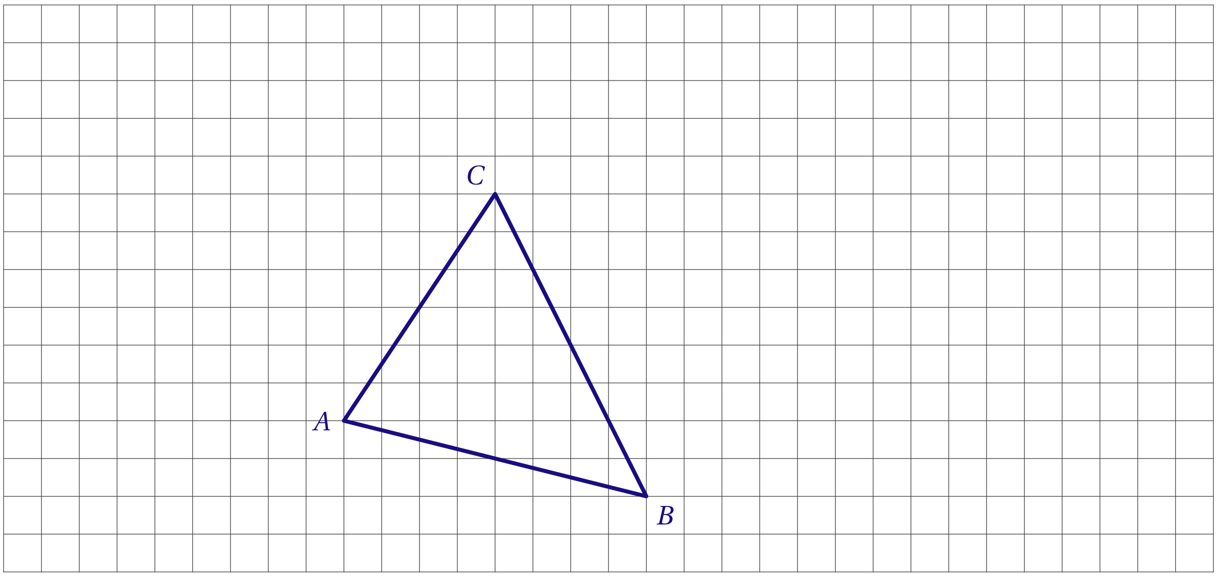
EXERCICE 15

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Placer les points E et F définis par les égalités : $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$
2. Les droites (AE) et (BF) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 16

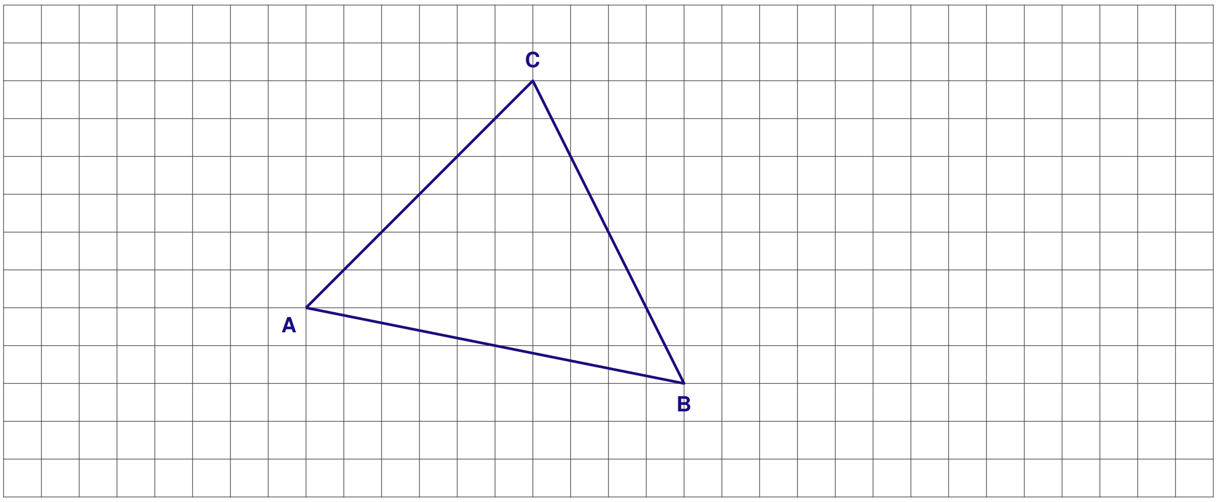
ABC est un triangle.



1. Soit M le point défini par $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$.
   a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) Placer le point M sur la figure.
2. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ on considère le point D de coordonnées $(1;1)$
   a) Placer le point D sur la figure.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
3. Les droites (BC) et (DM) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 17

ABC est un triangle.



1. Placer les points I, J et K tels que $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et K milieu du segment $[BC]$.
2. Exprimer les coordonnées des points I, J et K dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
3. Les points I, J et K sont-ils alignés ?

EXERCICE 18

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(-1;2)$, $B(-2;-3)$, $C(7;0)$ et $D(5;4)$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 19

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(-4;-1)$, $B(3;2)$ et $C(4;-1)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 20

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. On considère les points $A(-2;2)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer l'ordonnée y du point $D\left(-\frac{1}{3};y\right)$ tel que les points A, B et D soient alignés.

EXERCICE 21

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les points $A(-1;1)$, $B(2;1)$ et $C(-2;3)$

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BP}=\vec{0}$.
3. Les points B, M et P sont-ils alignés ?

EXERCICE 22

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(3;4)$, $B(-2;1)$ et $C(2;-2)$.

1. Soit G le point du plan tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
   a) Montrer que $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
   b) En déduire les coordonnées du point G.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
3. Soit J le milieu de $[AC]$. Les points B, G et J sont-ils alignés ?
4. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

EXERCICE 23

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(4;-2)$, $B(2;2)$, $C(-4;-1)$ et $D(-2;-5)$.

1. a) Placer le point E tel que le quadrilatère $ABEC$ soit un parallélogramme.
   b) Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?
2. a) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[BC]$.
   b) Les points A, O et M sont-ils alignés ?
3. a) Calculer les distances AC et BD.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 24

Le plan est muni d'un repère orthonormé (*unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)

1. Placer les points $A(-4;-3)$, $B(-1;3)$ et $C(3;1)$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme puis, placer D sur la figure.
3. Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit M le point défini par
$$6\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{CB}$$
   a) Démontrer que $\overrightarrow{BM} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   b) Construire le point M sur la figure (*on laissera apparents les traits de construction*).
   c) Calculer les coordonnées de M.
5. Les points D, I et M sont-ils alignés ? Justifier la réponse.

EXERCICE 25

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1. Placer les points $A(-5;1)$, $B(3;-3)$, $C(5;1)$ et $E(2;0)$.
2. a) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AB]$.
   b) Les points E, C et M sont-ils alignés ?
3. a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b) Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
4. a) Calculer les distances AC et BD.
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
5. Placer le point N de coordonnées $(1;3)$.
   Les droites (AN) et (EC) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 26

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1. Placer les points $A\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$, $B\left(4;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $C\left(3;-\dfrac{5}{2}\right)$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
3. Le vecteur $\vec{u}\,(2;4)$ est-il colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$? au vecteur $\overrightarrow{BC}$?
4. Soit $D\left(-1;y\right)$ où y est un nombre réel.
   a) Déterminer y pour que le point D appartienne à la droite (CI).
   Placer le point D dans le repère.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?
5. Le point B appartient-il au cercle de diamètre $[AC]$?