GYMNASE DE BURIER

Chapitre 9 - Polynômes et fractions rationnelles

Sarah Dégallier Rochat

1. La division euclidienne

Exemple 1.1 (Exemple numérique) Effectuer $45023 \div 34$.

Exemple 1.2 Calculer le quotient et le reste de la division de $\mathbf{x^3 - 3x^2 + 5x - 1}$ (le dividende) par $x^2 - 1$ (le diviseur) :

Le schéma de Horner permet d'effectuer de manière simple la division d'un polynôme par $\boxed{x - a}$.

Exemple 1.3 Diviser $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ par $x - 3$.

Notion de divisibilité

On dit qu'un polynôme p est **divisible** par un polynôme d si **le reste r de la division de p par d est 0**.

Exemple 1.4 $p(x) = x^3 - 8$ est divisible par $d(x) = x - 2$.

Contre-exemple 1.5 $p(x) = 2x^3 + x - 5$ n'est pas divisible par $d(x) = x + 3$.

Critère de divisibilité

p(x) est divisible par x-a ⇔ a est un zéro de p(x) [p(a)=0]

Exemple 1.4 Factoriser le polynôme suivant
$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ en effectuant une division euclidienne.

2. La notion de fraction rationnelle

Exercice 2.1 Un groupe d'amis s'entraîne au basket en faisant des lancers francs.

Annie a réussi 14 paniers. Sachant que son taux de réussite est de $\frac{2}{3}$, combien a-t-elle fait de lancers francs ?

Paul a fait 24 lancers francs et Sophie en a fait 36. Sachant que 20 paniers ont été réussis entre les deux joueurs et que le taux de réussite des joueurs est le même, combien de paniers a réussi Paul ?

3. Amplification et simplification de fractions

Lorsque l'on mutliplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même terme, on ne change pas sa valeur :

1. $\dfrac{5}{4}$
2. $\dfrac{x^3+3}{x-4}$

On parle d'amplification. On utilise l'amplification pour mettre différentes fractions **au même dénominateur** lorsque l'on veut les additionner ou les soustraire.
De même, lorsque l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même terme, on ne change pas sa valeur :

1. $\dfrac{9}{15}$
2. $\dfrac{(x^2-1)}{x^2+2x+1}$

On parle de simplification.

Exercice 3.1 Simplifier les fractions suivantes.

1. $\dfrac{3(x-2)^2}{6(x-2)}$

2. $\dfrac{5x^3y^2}{15x^5y}$

3. $\dfrac{5x}{15x^2+25x}$

4. $\dfrac{16-x^2}{x-4}$

4. Multiplication et division

Exercice 4.1 Effectuer les calculs suivants

1. $\dfrac{25}{12} \cdot \dfrac{9}{15}$

2. $\dfrac{32}{3} \div \dfrac{16}{9}$

3. $\dfrac{15}{16} \div 3$

4. $\dfrac{5^2}{2^3} \cdot \dfrac{2 \cdot 5^3}{5^2}$

Exemple 4.1 Effectuer les calculs suivants et réduire les fractions.

1. $\dfrac{x^2-4}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-9}{x+2}$

2. $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\div\dfrac{x^2}{x^2+x}$

Marche à suivre pour la multiplication

1. Factoriser au maximum chaque terme
2. Mettre sur la même barre de fractions
3. Simplifier

Marche à suivre pour la division

1. Transformer la division en multiplication
2. Factoriser au maximum chaque terme
3. Mettre sur la même barre de fractions
4. Simplifier

Exemple 4.2 Effectuer et réduire : $\dfrac{5x^2-5}{27x^3-8} \cdot \dfrac{9x^2+6x+4}{7x+7}$.

Exercice 4.2 Effectuer et réduire $\dfrac{3x^2}{x^3-1} : \dfrac{x^3}{x-1}$.

5. Addition et soustraction de fractions

Exercice 5.1. Effectuer et réduire les calculs suivants.

1. $$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$$

2. $$\frac{4}{6}+\frac{3}{72}-\frac{5}{4}$$

3. $$\frac{5}{2\cdot 3^3}+\frac{7}{2^3\cdot 3^2}$$

Exemple 5.1 Effectuer les calculs suivants.

1. $$\frac{2}{x-1}+\frac{5-3x}{x^2-x}$$

2. $$\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}$$

Marche à suivre pour l'addition et la soustraction

1. Factoriser au maximum les termes
2. Simplifier
3. Trouver le plus petit dénominateur commun
4. Amplifier les fractions pour qu'elles soient au même dénominateur
5. Mettre sur la même barre de fractions
6. Factoriser au maximum le numérateur
7. Simplifier

Exemple 5.2 Réduire : $\dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{2x+18}{x^2-9}$.

Exercice 5.2 Réduire : $\dfrac{3x^2-4x-1}{x^2-2x+1}-\dfrac{x+3}{x-1}$.

6. Résolution d'équations rationnelles

Règle de résolution Avant de résoudre un équation rationnelle, il faut ôter de l'ensemble des solutions possibles **toutes les valeurs qui annulent le dénominateur des fractions**. On parle d'ensemble de définition, noté D.

Exemple 6.1 Résoudre l'équation $\dfrac{2x-10}{x}=3$.

Exercice 6.2 Résoudre l'équation $\dfrac{x^3 - 4x}{x + 2} = 0$.