GYMNASE DE BURIER

Chapitre 9 - Polynômes et fractions rationnelles

Sarah Dégallier Rochat

1. La division euclidienne

Exemple 1.1 (Exemple numérique) Effectuer $45023 \div 34$.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & 44 & 55 & 0 & 2 & 3 & 34 \\ \cline{7-7}
- & 3 & 4 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & 1324 \\ \cline{1-3}
 & 11 & 11 & 00 & 2 & 3 & \\
- & 1 & 0 & 2 & \downarrow & \downarrow & \\ \cline{1-4}
 & & & 88 & 22 & 3 & \\
 & & - & 6 & 8 & \downarrow & \\ \cline{3-5}
 & & & 11 & 44 & 33 & \\
 & & - & 1 & 3 & 6 & \\ \cline{3-6}
 & & & & & 7 &
\end{array}
$$

45023 est appelé le ***dividende*** *et 34 le diviseur. 1324 est le quotient de la division et 7 son reste. On a que :*

$$45023 = 1324 \cdot 34 + 7$$

Exemple 1.2 Calculer le quotient et le reste de la division de $\mathbf{x^3 - 3x^2 + 5x - 1}$ (le dividende) par $x^2 - 1$ (le diviseur) :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & \mathrm{x^3}\mathbf{x^3} & - & \mathbf{3x^2} & + & \mathbf{5x} & - & \mathbf{1} & & x^2 - 1 \\
-[& x^3 & & & - & x & & &] & \hline x - 3 \\
\hline
 & 0 & -- & 3x^2 3x^2 & + & 6x & - & 1 & & \\
-[& & - & 3x^2 & & & + & 3 &] & \\
\hline
 & & & 0 & + & 6x6x6x & -- & 44 & &
\end{array}
$$

1. $\frac{x^3}{x^2} = x$
2. $x(x^2 - 1) = x^3 -$
3. $\frac{-3x^2}{x^2} = -3$
4. $-3(x^2 - 1) = -3$
5. $\frac{6x}{x^2} = \frac{1}{x}$ *STOP*

Le quotient de la division vaut donc $x - 3$ *et son reste* $6x - 4$. *On a donc*

$$\mathbf{x^3 - 3x^2 + 5x - 1} = (x - 3) \cdot (x^2 - 1) + 6x - 4$$

Le schéma de Horner permet d'effectuer de manière simple la division d'un polynôme par $\boxed{x - a}$.

Exemple 1.3 Diviser $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ par $x - 3$.

x^4	x^3	x^2	x	1	
1	-3	2	-1	2	
	$+$	$+$	$+$	$+$	
	3	0	6	15	$\cdot 3$
1	0	2	5	$\boxed{17}$	
x^3	x^2	x	1	*reste*	

Les nombres de la dernière ligne (sauf le dernier) sont les coefficients du quotient :

$$1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 5 \cdot 1 = x^3 + 2x + 5$$

Le dernier nombre, ici 17, *correspond au reste de la division. On a donc :*

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = (x - 3) \cdot (x^3 + 2x + 5) + 17$$

Notion de divisibilité

On dit qu'un polynôme p est **divisible** par un polynôme d si **le reste r de la division de p par d est 0**.

Exemple 1.4 $p(x) = x^3 - 8$ est divisible par $d(x) = x - 2$. *En effet,*

x^3	x^2	x	1
1	0	0	-8
	2	4	8
1	2	4	0
x^2	x	1	*reste*

$\cdot 2$

Le reste de la division est 0*, le polynôme est donc divisible par* $x - 2$*.On peut écrire le polynôme comme :*

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Contre-exemple 1.5 $p(x) = 2x^3 + x - 5$ n'est pas divisible par $d(x) = x + 3$.
En effet,

x^3	x^2	x	1
2	0	1	-5
	-6	18	-57
2	-6	19	-62
x^2	x	1	*reste*

$\cdot(-3)$

Le reste de la division est -62*, le polynôme n'est donc pas divisible par* $x + 3$.

Critère de divisibilité

p(x) est divisible par x-a ⇔ a est un zéro de p(x) [p(a)=0]

Exemple 1.4 Factoriser le polynôme suivant $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ en effectuant une division euclidienne.

Cherchons un zéro du polynôme $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$.

1. $p(0) = 0^3 - 3 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (0) - 2 = -2 \rightarrow$ *pas divisible par x*
2. $p(1) = 1^3 - 3 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (1) - 2 = -10 \rightarrow$ *pas divisible par $x - 1$*
3. $p(2) = 2^3 - 3 \cdot (2)^2 + 3 \cdot (2) - 2 = 8 - 12 + 6 - 2 = 0 \rightarrow$ *Divisible par $x - 2$!*

x^3	x^2	x	1	
1	-3	3	-2	
	$+$	$+$	$+$	
	2	-2	2	$\cdot 2$
1	-1	1	0	
x^2	x	1	*reste*	

On a donc $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x-2)(x^2 - x + 1)$ qui n'est pas plus factorisable ($\Delta < 0$ pour $x^2 - x + 1$)

2. La notion de fraction rationnelle

Exercice 2.1 Un groupe d'amis s'entraîne au basket en faisant des lancers francs.

Annie a réussi 14 paniers. Sachant que son taux de réussite est de $\frac{2}{3}$, combien a-t-elle fait de lancers francs ?

On cherche à résoudre $\frac{14}{x} = \frac{2}{3}$. x ne peut donc pas être égal à zéro.

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & \frac{14}{x} & = & \frac{2}{3} & \cdot x \\
\Leftrightarrow & 14 & = & \frac{2}{3} \cdot x & \cdot \frac{3}{2}, \leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x & = & \frac{3}{2} \cdot 14 & \text{CN} \\
\Leftrightarrow & x & = & 21 & \qquad \Rightarrow S = \{21\}
\end{array}$$

Annie a donc fait 21 lancers francs.

Paul a fait 24 lancers francs et Sophie en a fait 36. Sachant que 20 paniers ont été réussis entre les deux joueurs et que le taux de réussite des joueurs est le même, combien de paniers a réussi Paul ?

Soit x le nombre de paniers réussi par Paul. Sophie a donc réussi 20-x paniers. Les taux de réussite étant les mêmes, on a :

$$\begin{array}{rcl|l}
\frac{x}{24} & = & \frac{20-x}{36} & -\frac{20-x}{36} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{x}{24} - \frac{20-x}{36} & = & 0 & \textit{Même dénominateur} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{3x}{72} - \frac{40-2x}{72} & = & 0 & \cdot 72 \\
\Leftrightarrow \quad 3x-(40-2x) & = & 0 & \textit{CN} \\
\Leftrightarrow \quad 5x-40 & = & 0 & +40 \\
\Leftrightarrow \quad 5x & = & 40 & \div 5 \\
\Leftrightarrow \quad x & = & 8 & \qquad \Rightarrow S=\{8\}
\end{array}$$

Paul a réussi 8 paniers. Sophie en a réussi $20-8=12$.

3. Amplification et simplification de fractions

Lorsque l'on mutliplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même terme, on ne change pas sa valeur :

1. $\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{15}{12}$
2. $\frac{x^3+3}{x-4} = \frac{(x^3+3)\cdot 3x}{(x-4)\cdot 3x} = \frac{3x^4+9x}{3x^2-12x}$

On parle d'amplification. On utilise l'amplification pour mettre différentes fractions **au même dénominateur** lorsque l'on veut les additionner ou les soustraire.

De même, lorsque l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même terme, on ne change pas sa valeur :

1. $\frac{9}{15} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{\cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot 5} = \frac{3}{5}$
2. $\frac{(x^2-1)}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+1)} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x+1)\cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{x+1}$

On parle de simplification.

Exercice 3.1 Simplifier les fractions suivantes.

1. $\dfrac{3(x-2)^2}{6(x-2)} = \dfrac{\cancel{3}(x-2)^2}{\cancel{6}\,2(x-2)} = \dfrac{(x-2)^{\cancel{2}\,1}}{2\cancel{(x-2)}} = \dfrac{(x-2)}{2}$

2. $\dfrac{5x^3y^2}{15x^5y} = \dfrac{\cancel{5}x^3y^2}{\cancel{15}\,3x^5y} = \dfrac{\cancel{x^3}y^2}{3x^{\cancel{5}\,2}y} = \dfrac{y^{\cancel{2}\,1}}{3x^2\cancel{y}} = \dfrac{y}{3x^2}$

3. $\dfrac{5x}{15x^2+25x} = \dfrac{5x}{5x(x+5)} = \dfrac{\cancel{5x}\,1}{\cancel{5x}(x+5)} = \dfrac{1}{x+5}$

4. $\dfrac{16-x^2}{x-4} = \dfrac{(4-x)(4+x)}{x-4} = \dfrac{(4-x)(4+x)}{-(4-x)} = \dfrac{(4+x)\cancel{(4-x)}}{-\cancel{(4-x)}\,1} = -(4+x)$

4. Multiplication et division

Exercice 4.1 Effectuer les calculs suivants

1. $\dfrac{25}{12}\cdot\dfrac{9}{15} = \dfrac{25\cdot 9}{12\cdot 15} = \dfrac{\cancel{5}\cdot 5\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}} = \dfrac{5}{4}$

2. $\dfrac{32}{3}\div\dfrac{16}{9} = \dfrac{32}{3}\cdot\dfrac{9}{16} = \dfrac{32\cdot 9}{3\cdot 16} = \dfrac{\cancel{16}\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot 3}{\cancel{3}\cdot\cancel{16}\cdot 1} = \dfrac{6}{1} = 6$

3. $\dfrac{15}{16}\div 3 = \dfrac{15}{16}\div\dfrac{3}{1} = \dfrac{15}{16}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{15}{16\cdot 3} = \dfrac{5\cdot\cancel{3}}{4\cdot 4\cdot\cancel{3}} = \dfrac{5}{16}$

4. $\dfrac{5^2}{2^3}\cdot\dfrac{2\cdot 5^3}{5^2} = \dfrac{5^2\cdot 2\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^2} = \dfrac{5^5\cdot 2}{2^3\cdot 5^2} = \dfrac{5^5\cdot 2}{2^3\cdot 5^3} = \dfrac{5^{\cancel{5}\,2}\cdot 2}{2^3\cdot\cancel{5^3}} = \dfrac{5^{\cancel{5}\,2}\cdot\cancel{2}}{2^{\cancel{3}\,2}\cdot\cancel{5^3}} =$

Exemple 4.1 Effectuer les calculs suivants et réduire les fractions.

1.
$$\frac{x^2-4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x+2} = \frac{(x^2-4)\cdot(x^2-9)}{(x+3)\cdot(x+2)}$$
$$= \frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x+3)}\cdot(x-3)}{\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot 1}$$
$$= \frac{(x-2)\cdot(x-3)}{1} = (x-2)\cdot(x-3)$$

2.
$$\frac{x^2-x}{x^2-1}\div\frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x^2-x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+x}{x^2}$$
$$= \frac{x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{x\cdot(x+1)}{x\cdot x}$$
$$= \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot 1}{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Marche à suivre pour la multiplication

1. Factoriser au maximum chaque terme
2. Mettre sur la même barre de fractions
3. Simplifier

Marche à suivre pour la division

1. Transformer la division en multiplication
2. Factoriser au maximum chaque terme
3. Mettre sur la même barre de fractions
4. Simplifier

Exemple 4.2 Effectuer et réduire : $\dfrac{5x^2-5}{27x^3-8}\cdot\dfrac{9x^2+6x+4}{7x+7}$.

On commence par factoriser chaque terme :

1. $5x^2-5 \overset{MEE}{=} 5(x^2-1) = 5(x-1)(x+1)$
2. $27x^3-8 \overset{PR}{=} (3x-2)(9x^2+6x+4)$
3. $9x^2+6x+4 \Rightarrow \Delta = 6^2-4\cdot4\cdot9 = -108 < 0 \Rightarrow$ *Factorisé au maximum*
4. $7x+7 \overset{MEE}{=} 7(x+1)$

On remplace dans l'expression de départ

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2-5}{27x^3-8}\cdot\frac{9x^2+6x+4}{7x+7} &= \frac{5(x-1)(x+1)}{(3x-2)(9x^2+6x+4)}\cdot\frac{9x^2+6x+4}{7(x+1)}\\
&= \frac{5(x-1)(x+1)(9x^2+6x+4)}{(3x-2)(9x^2+6x+4)\cdot7\cdot(x+1)}\\
&= \frac{5(x-1)}{7(3x-2)}
\end{aligned}$$

Exercice 4.2 Effectuer et réduire $\dfrac{3x^2}{x^3-1} : \dfrac{x^3}{x-1}$.

On transforme la division en multiplication :

$$\frac{3x^2}{x^3-1} : \frac{x^3}{x-1} = \frac{3x^2}{x^3-1}\cdot\frac{x-1}{x^3}$$

On factorise ensuite chaque terme :

1. $3x^2$, x^3 et $x-1 \Rightarrow$ *Factorisé au maximum*
2. $x^3-1 \overset{PR}{=} (x-1)(x^2+x+1)$

On remplace dans l'expression de départ

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2}{x^3-1}\cdot\frac{x-1}{x^3} &= \frac{3x^2}{(x-1)(x^2+x+1}\cdot\frac{x-1}{x^3}\\
&= \frac{3x^2\cdot(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)x^3}\;\frac{3x^2\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)x^3}\\
&= \frac{3}{x(x^2+x+1)}
\end{aligned}$$

5. Addition et soustraction de fractions

Exercice 5.1. Effectuer et réduire les calculs suivants.

1. $$\frac{3}{4}+\frac{5}{6} = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$$

2. $$\begin{aligned}\frac{4}{6}+\frac{3}{72}-\frac{5}{4} &= \frac{4}{6}+\frac{1}{24}-\frac{5}{4}=\frac{4\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{1}{24}-\frac{5\cdot 6}{4\cdot 6}\\ &= \frac{16}{24}+\frac{1}{24}-\frac{30}{24}=\frac{16+1-30}{24}=\frac{-13}{24}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\frac{5}{2\cdot 3^3}+\frac{7}{2^3\cdot 3^2} &= \frac{5\cdot 2^2}{2\cdot 3^3\cdot 2^2}+\frac{7\cdot 3}{2^3\cdot 3^2\cdot 3}=\frac{20}{2^3\cdot 3^3}+\frac{21}{2^3\cdot 3^3}\\ &= \frac{20}{216}+\frac{21}{216}=\frac{41}{216}\end{aligned}$$

Exemple 5.1 Effectuer les calculs suivants.

1. $$\begin{aligned}\frac{2}{x-1}+\frac{5-3x}{x^2-x} &= \frac{2}{x-1}+\frac{5-3x}{x(x-1)}=\frac{2x}{x(x-1)}+\frac{5-3x}{x(x-1)}\\ &= \frac{2x+5-3x}{x(x-1)}=\frac{-x+5}{x(x-1)}=\frac{5-x}{x(x-1)}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2} &= \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{x^2-4x+4-[x^2+4x+4]}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{-8x}{(x-2)(x+2)}\end{aligned}$$

Marche à suivre pour l'addition et la soustraction

1. Factoriser au maximum les termes
2. Simplifier
3. Trouver le plus petit dénominateur commun
4. Amplifier les fractions pour qu'elles soient au même dénominateur
5. Mettre sur la même barre de fractions
6. Factoriser au maximum le numérateur
7. Simplifier

Exemple 5.2 Réduire : $\dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{2x+18}{x^2-9}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-3} - \frac{2x+18}{x^2-9} &= \frac{x+1}{x-3} - \frac{2(x+9)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{2(x+9)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{(x+1)(x+3) - 2(x+9)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{x^2+4x+3-2x-18)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{x^2+2x-15}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+3)} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+}{\cancel{(x-3)}(x+}
\end{aligned}
$$

Exercice 5.2 Réduire : $\dfrac{3x^2-4x-1}{x^2-2x+1}-\dfrac{x+3}{x-1}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}-\frac{x+3}{x-1} &= \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{x+3}{x-1}\\
&= \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{x+3}{x-1}\,\frac{(x+5)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}-\frac{x}{x}\\
&= \frac{(x+5)}{(x-1)}-\frac{x+3}{x-1}\\
&= \frac{(x+5)-(x+3)}{(x-1)}\\
&= \frac{x+5-x-3}{(x-1)}\\
&= \frac{2}{(x-1)}
\end{aligned}
$$

6. Résolution d'équations rationnelles

Règle de résolution Avant de résoudre un équation rationnelle, il faut ôter de l'ensemble des solutions possibles **toutes les valeurs qui annulent le dénominateur des fractions**. On parle d'ensemble de définition, noté D.

Exemple 6.1 Résoudre l'équation $\dfrac{2x-10}{x}=3$.

Le dénominateur s'annule quand $x=0$. Notre ensemble contient donc toutes les valeurs sauf 0. On le note $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$
\begin{array}{rrcl|l}
 & \dfrac{2x-10}{x} & = & 3 & \cdot x \\
\textit{Résolvante}\ \Rightarrow & 2x-10 & = & 3x & -3x+10 \\
\Leftrightarrow & -x & = & 10 & \cdot(-1) \\
\Leftrightarrow & x & = & -10 & \qquad \Rightarrow S_R=\{-10\}
\end{array}
$$

-10 se trouve dans l'ensemble de définition D, on a donc $S=\{-10\}$.

<u>Exercice 6.2</u> Résoudre l'équation $\dfrac{x^3-4x}{x+2}=0$.

Le dénominateur s'annule quand $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$. *On a donc* $D=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & \dfrac{x^3-4x}{x+2} & = & 0 & \cdot (x+2) \\
\overset{\text{Résolvante}}{\Rightarrow} & x^3-4x & = & 0 & \textit{Mise en évidence} \\
\Leftrightarrow & x(x^2-4) & = & 0 & \textit{Produit remarquable} \\
\Leftrightarrow & x(x-2)(x+2) & = & 0 & \qquad \Rightarrow S_R=\{-2;0;2\}
\end{array}$$

-2 n'étant pas dans D, on a $S=\{0;2\}$.