Corrigé : Inéquations et études de signe

1. a) $S =]3; +\infty[$
   b) $S =]1; 8[$
   c) $S = \mathbb{R}$
   d) $S =]-\infty; -5] \cup [1; 6]$
   e) $S = \emptyset$

2. a) Zéros : $Z = \{1; 3\}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $S =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

b) Zéros : $Z = \{-5; 3\}$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $S =]-5, 3[$

c) Zéros : $Z = \{2\}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

On a donc $S = \mathbb{R} \backslash \{2\}$

d) Zéros : $Z = \{5\}$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

On a donc $S = [5, +\infty[$

e) Zéros : $Z = \{-3; 4; -2; 5\}$

x	$-\infty$		-3		-2		4		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $S =]-\infty, -3[\cup]-2, 4[\cup]5, +\infty[$

f) Zéros : $Z = \{0\}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

On a donc $S = \{0\}$

g) Zéros : $Z = \{0; 4\}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $S =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$

h) Zéros : $Z = \{\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\}$

x	$-\infty$		0		$1/3$		$3/2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $S =]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$

3. a) Forme factorisée : $(x-2)(x-1) > 0$
Les zéros sont : $Z = \{1; 2\}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $S =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$

b) Forme factorisée : $-(x-4)(x+1) > 0$
Les zéros sont : $Z = \{-1; 4\}$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $S =]-1; 4[$

c) Forme factorisée : $x^2 - 10x + 40 > 0$ (toujours positive)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

On a donc $S = \mathbb{R}$

d) Forme factorisée : $(x-6)(x-2) \geq 0$
Les zéros sont : $Z = \{2; 6\}$

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $S =]-\infty; 2] \cup [6; +\infty[$

e) Forme factorisée : $(2x-5)^2 > 0$
Les zéros sont : $Z = \{\frac{5}{2}\}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

On a donc $S = \mathbb{R} \backslash \{\frac{5}{2}\}$

f) Forme factorisée : $x(x-2) \leq 0$
Les zéros sont : $Z = \{0; 2\}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $S = [0; 2]$

g) Les zéros sont : $Z = \{0\}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

On a donc $S = \mathbb{R}$

h) Forme factorisée : $5x^2 + 8x + 4 < 0$ (toujours positif)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

On a donc $S = \emptyset$

4. a) $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	||	$+$	

b) $D(g) = \mathbb{R}\backslash\{0;3\}$

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

c) $D(h) = \mathbb{R}\backslash\{-1;3\}$

x	$-\infty$		-2		-1		2		3		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$+$	||	$+$	

d) $D(i) = \mathbb{R}\backslash\{-3;3\}$

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
$i(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

5. Soit $Z(f)$ l'ensemble des zéros et $D(f)$ le domaine de définition de f.

a) $Z(f) = \{2\}$ et $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

$S =]-4;2]$

b) $Z(f) = \{2\}$ et $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	

$S =]2;+\infty[$

c) $Z(f) = \{3\}$ et $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$+$	0	$+$	

$S = \{3\}$

d) $Z(f) = \emptyset$ et $D(f) = \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	

$S =]0; +\infty[$

e) Sous forme factorisée

$$f(x) = \frac{5(x-5)(x+5)}{x^2}$$

et donc $Z(f) = \{-5; 5\}$ et $D(f) = \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		-5		0		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

$S = [-\infty; -5] \cup [5; +\infty[$

f) Sous forme factorisée

$$g(x) = f(x) - 375 = \frac{375(20-x)(20+x)}{x^2}$$

et donc $Z(g) = \{-20; 20\}$ et $D(g) = \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		-20		0		20		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; 20] \cup [20; +\infty[$

6. Soit $Z(f)$ l'ensemble des zéros et D le domaine de définition.

a) $f(x) = 3(x-2)(x+4) - 6(x-2)(x+5) = -3(x-2)(x+6) > 0$, $Z = \{-6; 2\}$ et $D = \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-6; 2[$

b) Forme factorisée : $f(x) = -3(x+3)^3(4x-9)^2 > 0$, $Z = \{-3; \frac{9}{4}\}$ et $D = \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

$S =]-3; \frac{9}{4}[\cup]\frac{9}{4}; \infty[$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x} = \frac{(x+3)(x-4)}{x(x+2)} \leq 0$, $Z = \{-3; 4\}$ et $D = \mathbb{R} \backslash \{-2; 0\}$.

x	$-\infty$		-3		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$S = [-3;-2[\cup]0;4]$

d) $f(x) = \dfrac{x(4x^2-9)^2}{10(x^2-9)} = \dfrac{x(2x-3)^2(2x+3)^2}{10(x-3)(x+3)} < 0$, $Z = \{-3/2, 0, 3/2\}$ et $D = \mathbb{R}\backslash\{-3;3\}$

x	$-\infty$		-3		-3/2		0		3/2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	‖	$+$	

$S =]-\infty;3[\cup]0;3/2[\cup]3/2;3[$

e) $f(x) = \dfrac{4x}{x+1} + \dfrac{4}{x-1} = 4\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \geq 0$, $Z = \emptyset$ et $D = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$S =]-\infty;-1[\cup]1;\infty[$

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x^2} - \dfrac{x-1}{x^2-2x} = -\dfrac{-(x^2+5x-2)}{2x^2(x-2)} = -\dfrac{(x-\frac{-5+\sqrt{33}}{2})(x-\frac{-5+\sqrt{33}}{2})}{2x^2(x-2)} \leq 0$,
$Z = \{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}; \frac{-5+\sqrt{33}}{2}\}$ et $D = \mathbb{R}\backslash\{0;2\}$

x	$-\infty$		$\frac{-5-\sqrt{33}}{2}\}$		0		$\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$S =]\frac{-5-\sqrt{33}}{2};0[\cup]\frac{-5+\sqrt{33}}{2};1]\cup]2;+\infty[$