Corrigé Test 5 - Fractions rationnelles et Inéquations - Série A

Question 1

Donner lez zéros, le domaine de définition et le tableau de signe des fonctions suivantes **à partir de leur graphe**.

a) $Z = \{-1\}$, $I = \{-4; 2\}$, $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-4; 2\}$

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	

b) $Z = \{-4; 0; 4\}$, $I = \{-6; 6\}$, $D(g) = \mathbb{R}\backslash\{-6; 6\}$

x	$-\infty$		-6		-4		0		4		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Question 2

Donner les expressions suivantes sous forme factorisée et réduite.

a) $(-3) : \left(\frac{5}{8} - \frac{7}{10}\right) = (-3) \div \left(\frac{25-28}{40}\right) = (-3) \div \left(-\frac{3}{40}\right) = (-3) \cdot \left(-\frac{40}{3}\right) = 40$

b) $\dfrac{-5+\frac{7}{3}}{5+\frac{7}{3}} \cdot \left(-\frac{11}{16}\right) = \dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{22}{3}} \cdot \left(-\frac{11}{16}\right) = \left(-\frac{8}{22}\right) \cdot \left(-\frac{11}{16}\right) = \frac{8 \cdot 11}{22 \cdot 16} = \frac{1}{4}$

c) $\dfrac{x-x^3}{x^4+x} = \dfrac{x(1-x^2)}{x(x^3+1)} = \dfrac{x(1-x)(1+x)}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{(1-x)}{(x^2-x+1)}$

d) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{5-3x}{x-x^2} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{5-3x}{-x(x-1)} = \dfrac{-2x}{-x(x-1)} + \dfrac{5-3x}{-x(x-1)} = \dfrac{-2x+5-3x}{-x(x-1)} = \dfrac{-5x+5}{-x(x-1)} = \dfrac{-5(x-1)}{-x(x-1)} = \dfrac{5}{x}$

e) $\dfrac{x-5}{x^3-3x^2+3x-1} \cdot \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25} = \dfrac{x-5}{(x-1)^3} \cdot \dfrac{(x-1)^2}{(x+5)^2} = \dfrac{(x-5)(x-1)^2}{(x-1)^3(x+5)^2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+5)}$

f) $\dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \dfrac{(x+2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^2-4x+4-[x^2+4x+4]}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{-8x}{(x-2)(x+2)}$

g)

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3-3x^2+4x-6}{12x^2} : \frac{x^2+2}{6x^2-9x} &= \frac{2x^3-3x^2+4x-6}{12x^2} \cdot \frac{6x^2-9x}{x^2+2} = \frac{x^2(2x-3)+2(2x-3)}{12x^2} \cdot \frac{3x(2x-3)}{x^2+2} \\
&= \frac{(2x-3)(x^2+2)}{12x^2} \cdot \frac{3x(2x-3)}{x^2+2} = \frac{3x(2x-3)^2(x^2+2)}{12x^2(x^2+2)} = \frac{(2x-3)^2}{4x}
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-3} - \frac{2x+18}{x^2-9} &= \frac{x+1}{x-3} - \frac{2x+18}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{2x+18}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+4x+3-(2x+18)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{x^2+2x-15}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+5}{x+3}
\end{aligned}$$

Question 3

Résoudre les inéquations suivantes en donnant les zéros, le domaine de définition et le tableau de signe de chaque fonction.

a) $f(x) = (x-3)(x+2)^2 < 0$

$Z = \{-2; 3\}$ et $D(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty; -2[\cup]-2; 3[$

b) $f(x) = \dfrac{5x+2}{(3x+2)(4-3x)} \geq 0$

$Z = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$ et $D(f) = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$\mathrm{S} = \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left[-\frac{2}{5}; \frac{4}{3}\right[$

c) $f(x) = x^2(x-8) + 2x(x-8) + x - 8 = (x-8)(x+1)^2 \leq 0$
$\mathrm{Z} = \{-1; 8\}$ et $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		8		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

$\mathrm{S} =]-\infty; 8]$

d) $f(x) = x - 21 - \frac{40-3x}{x} = \frac{x^2 - 21x - 40 + 3x}{x} = \frac{x^2 - 18x - 40}{x} = \frac{(x-20)(x+2)}{x} \geq 0$
$\mathrm{Z} = \{-2; 20\}$ et $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		-2		0		20		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

$\mathrm{S} =]-2; 0[\cup [20; +\infty[$

Question 4

(BONUS) Soit le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

a) Donner une fonction f dont le signe correspond au tableau ci-dessus : $f(x) = \frac{2-x}{(x-5)^2}$

b) Esquisser le graphe d'une fonction dont le signe correspond au tableau ci-dessus