GYMNASE DE BURIER

Chapitre 7 - Fonctions Quadratiques

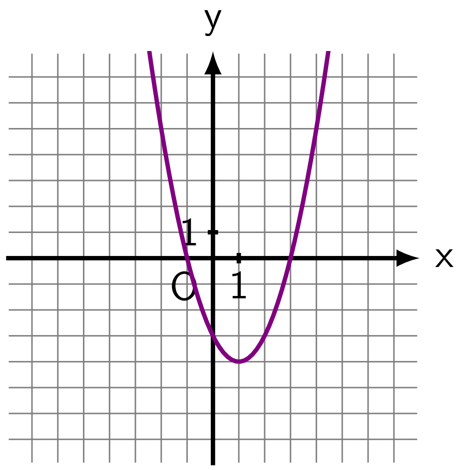
Sarah Dégallier Rochat

1. Fonctions quadratiques et paraboles

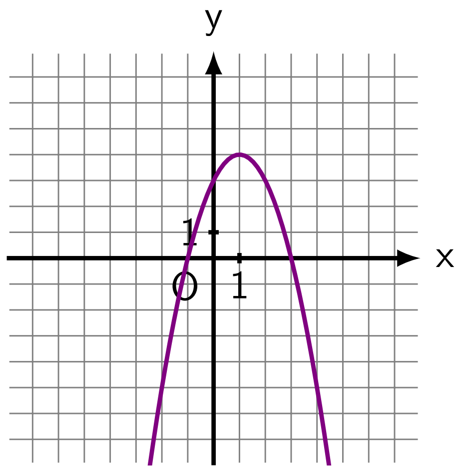
Une fonction quadratique est une fonction de la forme

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

avec $a \neq 0$. La courbe représentative d'une fonction quadratique est une **parabole**.

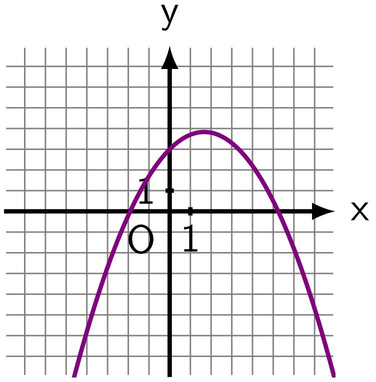


Si $a > 0$ la parabole est **convexe**

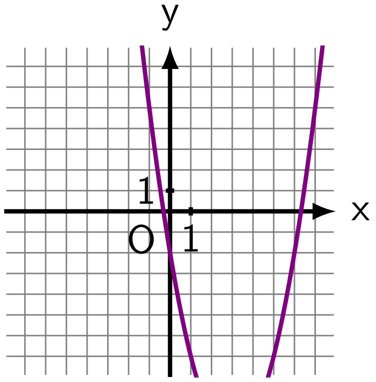


Si $a < 0$ la parabole est **concave**

Exercice 1.1 Les paraboles suivantes sont-elle convexes ou concaves ?



Concave



Convexe

Exercice 1.2 Les fonctions suivantes sont-elles quadratiques ? Si oui, la parabole correspondante est-elle convexe ou concave ?

a) $-2x^2 + 5x - 21$
Oui / Concave $(a = -2 < 0)$

b) $4 - x^2$
Oui / Concave $(a = -1 < 0)$

c) $\dfrac{1}{5x^2 + 2x + 1}$ *Non*

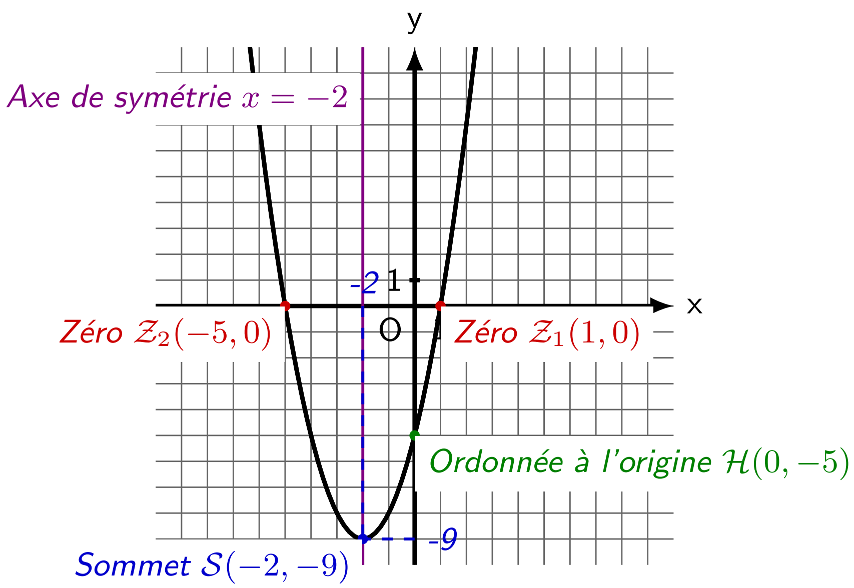
d) $3x + 1$ *Non*

e) $3x + x^2$
Oui / Convexe $(a = 1 < 0)$

f) $\sqrt{x^2 + 3x - 2}$ *Non*

2. Points caractéristiques

Soit la parabole d'équation $y = x^2 + 4x - 5$. Ses points caractéristiques sont les suivants.



Une fonction quadratique a toujours un sommet et une ordonnée à l'origine ; elle peut avoir 0, 1 ou 2 zéros.

Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation d'une parabole.

<u>Coordonnées du sommet</u> $\boxed{\mathcal{S} = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

<u>Equation de l'axe de symétrie</u> $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$ (droite verticale passant par le sommet)

<u>Exemple 2.1</u> Soit la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.
Calculer les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie.

On a $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$ *et* $c = 4$.

On calcule : $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 = 1 + 8 = 9$

On remplace : $\mathcal{S} = \left(-\frac{-1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}; -\frac{9}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = \left(-1, \frac{9}{2}\right)$

L'équation de l'axe de symétrie est donc $x = -1$.

<u>Exemple 2.2</u> Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction quadratique.
Calculer $f(0)$.

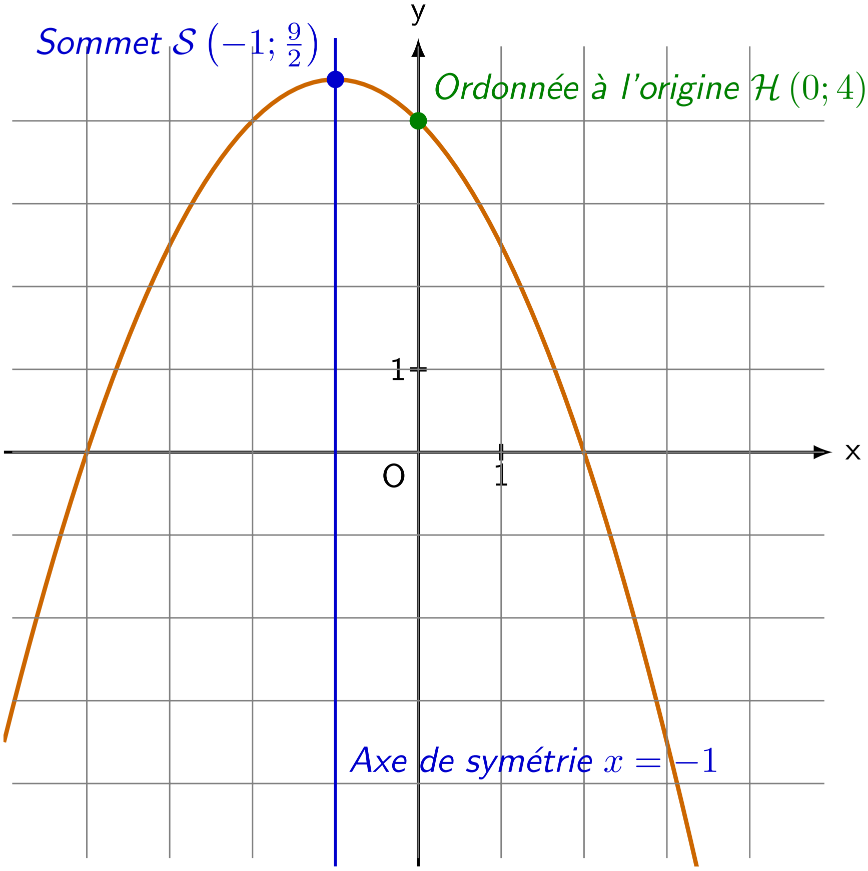
$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

Le point $\mathcal{H}(0; c)$ *fait donc partie du graphe de la fonction (i.e, de la parabole). On appelle ce point l'ordonnée à l'origine car il correspond à la valeur de l'ordonnée* (y) *lorsque* $x = 0$.

<u>Ordonnée à l'origine</u> $\boxed{\mathcal{H} = (0; c)}$

<u>Exemple 2.1 (suite)</u> Calculer l'ordonnée à l'origine de la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$. Placer ce point ainsi que le sommet et l'axe de symétrie sur le graphique.

On a $\mathcal{H} = (0; c) = (0; 4)$.

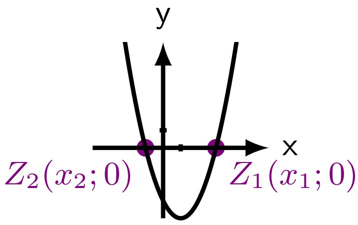


Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Les zéros de la fonction $f(x)$ correspondent aux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Zéros

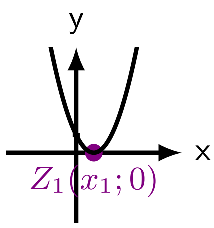
(1) Si $\boxed{\Delta > 0}$, il y a deux intersections :

$$Z_1\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};0\right) \text{ et } Z_2\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$$

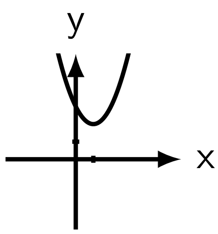


(2) Si $\boxed{\Delta = 0}$, il y a une seule intersection :

$$Z_1\left(\frac{-b}{2a};0\right)$$



(3) Si $\boxed{\Delta < 0}$, il n'y a pas intersections.



Exemple 2.1 (suite) Calculer les zéros de la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$. Compléter le graphique précédent.

On résoud l'équation $-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$.

$$\begin{array}{rrcl|l} & -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 & = & 0 & MEE \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 8) & = & 0 & SP \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{2}(x+4)(x-2) & = & 0 & \end{array} \quad \Rightarrow S = \{-4; 2\}$$

Il y a deux solutions, il y aura donc deux zéros :

$$Z_1(-4; 0) \text{ et } Z_2(2; 0)$$

Remarque 2.1 La première coordonnée du sommet $x_{\mathcal{S}}$ d'une parabole est toujours égale à la moyenne des premières coordonnées des zéros $x_{\mathcal{Z}_1}$ et $x_{\mathcal{Z}_2}$

$$x_{\mathcal{S}} = \frac{x_{\mathcal{Z}_1} + x_{\mathcal{Z}_2}}{2}$$

S'il n'y a qu'un zéro, on a $x_{\mathcal{S}} = x_{\mathcal{Z}}$.

Exemple 2.2 Dans l'exemple précédent, on avait

$$\mathcal{S}\left(-1; \frac{9}{2}\right), \quad \mathcal{Z}_1(-4; 0) \text{ et } \mathcal{Z}_2(2; 0)$$

Vérifier la formule de la remarque précédente.

On a $x_{\mathcal{S}} = -1$, $x_{\mathcal{Z}_1} = -4$ *et* $x_{\mathcal{Z}_2} = 2$. *Donc*

$$x_{\mathcal{S}} \stackrel{?}{=} \frac{x_{\mathcal{Z}_1} + x_{\mathcal{Z}_2}}{2} \Rightarrow -1 \stackrel{?}{=} \frac{-4 + 2}{2} \Leftrightarrow -1 \stackrel{?}{=} -1 \qquad \checkmark$$

3. Calcul avec les coordonnées

Rappel 3.1 Un point $(x; y)$ fait partie d'une courbe si ses coordonnées satisfont l'équation de cette courbe.

Exemple 3.1 Le point $(-2; 4)$ fait-il partie de la parabole $y = -2x^2 - 5x + 1$?

$4 \overset{?}{=} -2\cdot(-2)^2 - 5\cdot(-2) + 1 \Leftrightarrow 4 \overset{?}{=} -8 + 10 + 1 \Leftrightarrow 4 \overset{?}{=} 3 \Rightarrow$ Non

Rappel 3.2 On appelle zéro les valeurs telles que $f(x) = 0$.

Exemple 3.2 Quels sont les zéros de la fonction $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$?

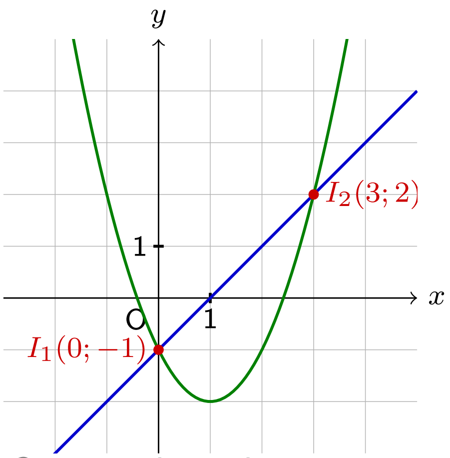
On résoud l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{array}{rrcl|l} & 2x^2 - 12x + 18 & = & 0 & MEE \\ \Leftrightarrow & 2(x^2 - 6x + 9) & = & 0 & PR \\ & \Leftrightarrow \quad 2(x-3)^2 & = & 0 & \qquad \Rightarrow S = \{3\} \end{array}$$

La fonction n'a qu'un zéro : $x = 3$.

Intersection entre une droite et une parabole

Exemple 3.3 Calculer les coordonnées des points d'intersection entre la parabole d'équation $y_f = x^2 - 2x - 1$ et la droite d'équation $y_g = x - 1$.



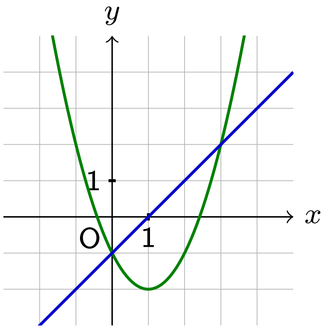
On cherche les valeurs de x pour lesquelles $y_f = y_g$:

$$\begin{array}{rcl|l} x^2 - 2x - 1 & = & x - 1 & -x+1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x & = & 0 & CL \\ \Leftrightarrow x(x-3) & = & 0 & \Rightarrow S = \{0, 3\} \end{array}$$

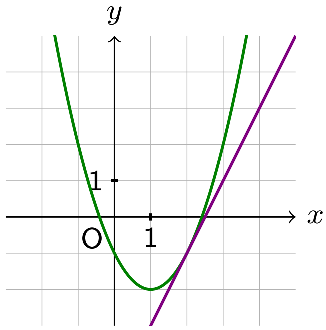
On remplace dans y_g pour trouver la deuxième coordonnée ;

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow I_1(0; -1)$$
$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = x - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow I_2(3; 2)$$

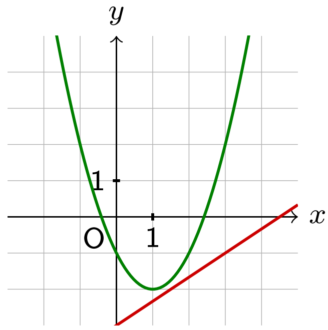
Lorsque que l'on cherche les points d'intersection entre une droite et une parabole, trois cas sont possibles :



Deux intersections

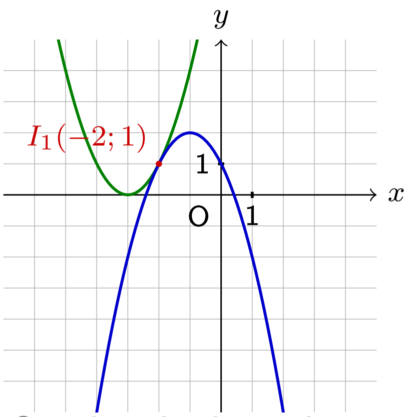


Une intersection
La droite et la parabole sont tangentes



Aucune intersection

Intersection entre deux paraboles distinctes



Exemple 3.4 Calculer les coordonnées des points d'intersection des paraboles d'équation $y_f = x^2 + 6x + 9$ et $y_g = -x^2 - 2x + 1$.

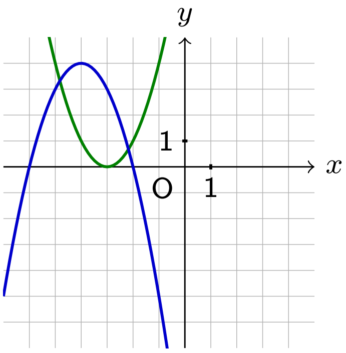
On cherche les valeurs de x pour lesquelles $y_f = y_g$ *:*

$$\begin{array}{rcl|l} x^2+6x+9 & = & -x^2-2x+1 & +x^2+2x-1 \\ \Leftrightarrow 2x^2+8x+8 & = & 0 & \textit{CL} \\ \Leftrightarrow 2(x^2+4x+4) & = & 0 & \textit{CL} \\ \Leftrightarrow 2(x+2)^2 & = & 0 & \Rightarrow S=\{-2\} \end{array}$$

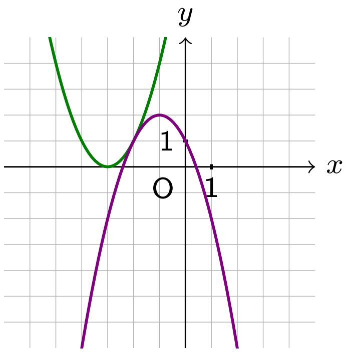
On remplace dans y_f *pour trouver la deuxième coordonnée ;*

$$x=-2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2+6x+9 = (-2)^2 + 6\cdot(-2) + 9$$
$$= 4 - 12 + 9 = 1 \Rightarrow I_1(-2;1)$$

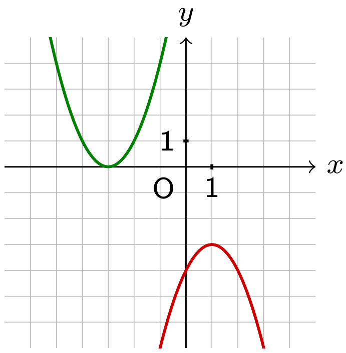
Lorsque l'on calcule l'intersection entre deux paraboles distinctes, trois cas sont possibles :



Deux intersections



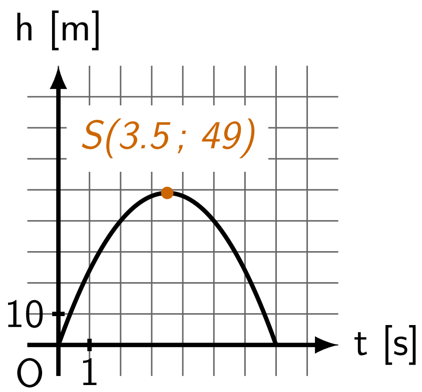
Une intersection
Les paraboles sont tangentes



Aucune intersection

4. Application pratique

Exemple 4.1 Une balle est tirée en l'air à partir du sol. La hauteur h (en mètres) de la balle en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $h(t) = -4t^2 + 28t$.



a) Calculer la hauteur maximale atteinte par la balle.

La hauteur maximale de la balle correspond au sommet de la parabole. On calcule donc les coordonnées du sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

La balle atteindra le sommet au temps
$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{28}{2\cdot(-4)} = -\frac{28}{-8} = 3.5$ *s.*
Pour trouver la hauteur, on peut remplacer $t = 3.5$ *dans l'équation* $h(t)$: $h(3.5) = -4 \cdot (3.5)^2 + 28 \cdot 3.5 = 49$
La hauteur maximale de la balle (atteinte après 3.5 secondes) sera donc de $\boxed{49 \text{ mètres}}$.

b) Calculer le temps que met la balle pour retomber au sol.

Nous devons calculer pour quelles valeurs de t l'on a
$h(t) = -4t^2 + 28t = 0$.
On calcule Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 28^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = 784 > 0$$

On a donc deux solutions :

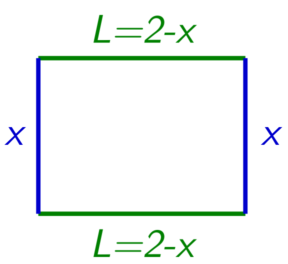
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-28 + 28}{2 \cdot (-4)} = 0$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-28 - 28}{2 \cdot (-4)} = \frac{-56}{-8} = 7$$

La balle met donc $\boxed{\text{7 secondes}}$ *pour retomber sur le sol.*

5. Optimisation

Exemple 5.1 Robert veut faire un parc rectangulaire pour son chien. Il a 10 mètres de barrière. De quelle taille doivent être la longueur L et la largeur x du parc pour maximiser son aire $\mathcal{A}$? Exprimer l'aire en fonction de x et tracer le graphe de la fonction.



Soit x la largeur du parc et L sa longueur. Le périmètre du parc vaut

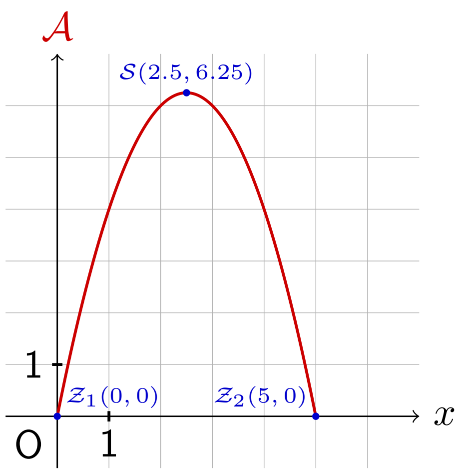
$$P = 2x + 2L = 10.$$

On cherche à maximiser l'aire $\mathcal{A} = x \cdot L$.

On exprime L en fonction de x :
$2x + 2L = 10 \Rightarrow 2L = 10 - 2x \Rightarrow L = 5 - x$

L'aire du parc sera donc de

$$\mathcal{A} = x \cdot L = x(5 - x) = 5x - x^2 = -x^2 + 5x$$



Traçons le graphe de la fonction. Pour cela, calculons les coordonnées des zéros et du sommet.

$$\begin{array}{rrcl|l} & -x^2+5x & = & 0 & MEE \\ \Leftrightarrow & -x(x-5) & = & 0 & \end{array}$$

On a S=$\{0;5\}$ et donc $\mathcal{Z}_1(0,0)$ et $\mathcal{Z}_2(5,0)$.

On calcule ensuite les coordonnées du sommet S($\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}$) :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-2} = 2.5 \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{5^2-4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)} = \frac{15}{4} = 6.25$$

L'aire est maximale quand la largeur vaut $x = 2.5$ m et la longueur $y = 5 - x = 5 - 2.5 = 2.5$ m. Le parc doit donc être carré pour que l'aire soit maximale !