Thème 5: Systèmes d'équations

Introduction : Certaines applications mathématiques nécessitent parfois l'emploi simultané de plusieurs équations à plusieurs inconnues, c'est-à-dire de systèmes d'équations.

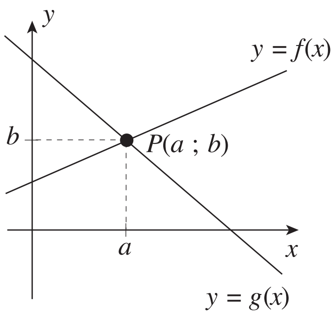
Dans ce chapitre, nous allons développer trois méthodes pour trouver les solutions communes à toutes les équations d'un système:

- résolution par voie graphique;
- résolution algébrique par addition;
- résolution algébrique par substitution.

Nous nous limiterons à résoudre des systèmes de deux équations du 1^{er} degré à deux inconnues (que l'on appelle système linéaire). Finalement, nous appliquerons ces démarches à quelques problèmes de la vie courante.

5.1 Résolution d'un système par voie graphique

Démarche générale : Dans ce paragraphe, nous ne traiterons que des systèmes de deux équations à deux inconnues.



Considérons la représentation graphique de deux fonctions affines f et g présentée dans la figure ci-contre. Nous allons nous intéresser aux coordonnées du **point d'intersection** $P(a\,;b)$. Il s'agira de trouver le couple $(a\,;b)$ vérifiant les conditions simultanément :

$$b = f(a) \text{ et } b = g(a)$$

c'est-à-dire :

« les deux courbes sont à la même hauteur b au même moment a »

Nous dirons que $(a\,;b)$ est une solution du système d'équations :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Sur la figure, nous pouvons observer que ce problème semble admettre 1 solution, car il y a 1 point d'intersection P.

Marche à suivre pour la résolution graphique :

a) Transformer le système d'équations pour l'écrire sous la forme $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

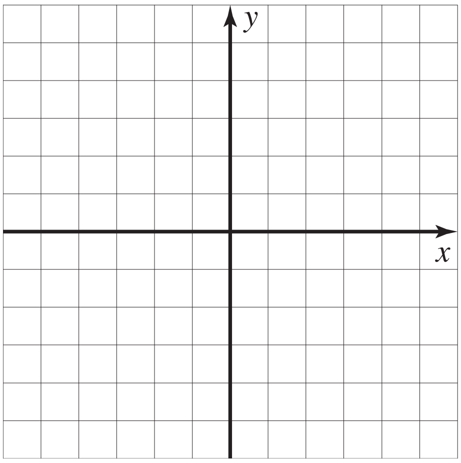
b) Représenter les 2 fonctions affines f et g sur un graphique.

c) En déduire les coordonnées $(a\,;b)$ du point d'intersection.

d) Coder la solution sous la forme $S = \{(a\,;b)\}$.

Modèle 1 : Résoudre le système d'équations $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$

résolution graphique d'un système d'équations

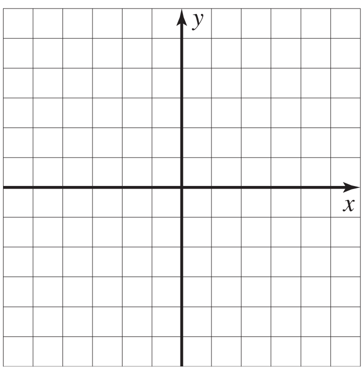


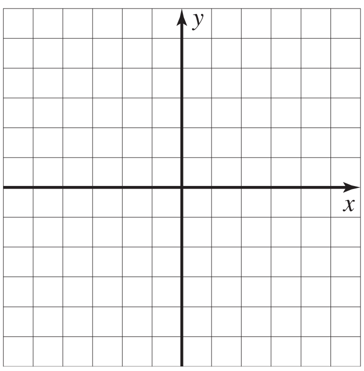
Exercice 5.1: Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 3y = -15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

Exercice 5.2: Résoudre graphiquement (ci-dessous) les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$





5.2 Résolution algébrique par la méthode de l'addition

Pour trouver les solutions d'un système, nous pouvons manipuler les équations individuellement (comme d'habitude) ou combiner les deux équations ensemble jusqu'à ce que nous obtenions un système d'équations simples dont les solutions peuvent être trouvées rapidement.

Ces manipulations (ou *transformations*) **ne modifiant pas les solutions** d'un système sont précisées ci-dessous.

Manipulations : **(1)** Intervertir deux équations,

(2) Additionner un multiple d'une équation à un multiple de l'autre équation.

Modèle 2 : Résoudre le système : $\begin{cases} 6x + 3y = -1 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases}$

Définition : La technique utilisée dans le modèle précédent est appelée **méthode par addition** (ou **par combinaison linéaire**), elle est particulièrement efficace sur les systèmes présentés sous la forme :

$$\begin{cases} \ldots x + \ldots y = \ldots \\ \ldots x + \ldots y = \ldots \end{cases}$$

Modèle 3 : Résoudre le système : $\begin{cases} \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} = 0 \\ -x - \dfrac{7-3y}{2} = 0 \end{cases}$

résolution par addition

Exercice 5.3: Résoudre par addition les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x - 8y - 9 = 0 \\ 4x + 3y + 10 = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3r + 4s = 3 \\ r - 2s = -4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 9u = -2v \\ 5v = 3u - 17 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = \dfrac{6y+4}{5} \\ y = \dfrac{-3x+8}{7} \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d = 5 \\ c - \frac{2}{3}d = -1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{1}{5}v = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}v = \frac{5}{12} \end{cases}$ **k)** $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$

l) $\begin{cases} 0{,}11x - 0{,}03y = 0{,}25 \\ 0{,}12x + 0{,}05y = 0{,}70 \end{cases}$ **m)** $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

Modèle 4 : Résoudre le système : $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ x+2y=3 \end{cases}$

avec une infinité de solutions

Modèle 5 : Résoudre le système : $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ x+2y=4 \end{cases}$

n'admettant pas de solution

Exercice 5.4: Résoudre par addition les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3p-q=7 \\ -12p+4q=3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3m-4n=2 \\ -6m+8n=-4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-5y=2 \\ 3x-15y=6 \end{cases}$

Exercice 5.5: Pour les cracks :

a) $\begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{8} + \frac{y-2}{5} = 2 \\ 2x - 21 = \frac{5-2y}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-4}{5} - \frac{3y+4}{10} = x - y \\ \frac{2x-5}{5} - \frac{2y-4}{4} = x - 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{y+1}{3} + 1 = 0 \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y-1}{8} = \frac{5}{4} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1 \end{cases}$

5.3 Résolution algébrique par la méthode de la substitution

Modèle 6 : Résoudre le système : $\begin{cases} x - 3y = 9 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$

résolution par substitution

Démarche de résolution :
- on isole une inconnue dans une des deux équations;
- dans l'autre équation, on substitue cette inconnue par l'expression trouvée;
- on résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue ;
- on substitue dans la première équation la deuxième inconnue par la solution qui vient d'être découverte ;
- on résout cette dernière équation à une inconnue ;
- on vérifie, si on a un doute, que les nombres du couple trouvé vérifient les équations du système ;
- la solution cherchée est donnée par les couples ainsi déterminés que l'on code sous la forme S = {(… ; …)}.

Modèle 7 : Résoudre le système : $\begin{cases} 2x+5y=13 \\ -3x+2y=9 \end{cases}$

résolution par substitution

Exercice 5.6: Résoudre par substitution les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4y+20=0 \\ 3x+2y+8=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -6x+9y=4 \end{cases}$

5.4 Problèmes d'application

Les techniques de résolution des systèmes d'équations à deux inconnues permettent de résoudre des problèmes de la vie courante.

Modèle 8 : Un producteur a une exploitation de 100 hectares sur laquelle poussent des laitues et des choux. Chaque hectare de choux nécessite 600 heures de travail, et chaque hectare de laitues nécessite 400 heures de travail. Si l'on dispose de 45'000 heures et que tout le terrain et toute la main-d'œuvre doivent être utilisés, trouver le nombre d'hectares de chaque légume qu'il faudrait planter.

application

Démarche : ***Pour résoudre un problème à deux inconnues :***

- *on désigne les 2 inconnues ;*
- *on traduit les données du problème par deux équations ;*
- *on résout le système formé par les deux équations ;*
- *on vérifie si la solution découverte convient au problème ;*
- *on énonce la solution qui convient sous la forme d'une phrase.*

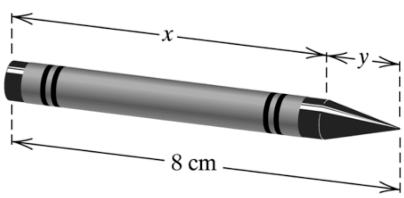
Exercice 5.7: Le prix d'entrée pour une pièce de théâtre dans un lycée était de 3 fr. pour les élèves et de 4.50 fr. pour les autres personnes. Si 450 billets ont été vendus pour un total de 1555.50 fr., combien de billets de chaque catégorie ont été achetés ?

Exercice 5.8: Une papeterie vend deux sortes de blocs-notes aux librairies des collèges, la première sorte au prix de gros de 1 fr. et la seconde sorte à 1,40 fr. La papeterie reçoit une commande de 500 blocs-notes, accompagnée d'un chèque de 572 fr. Si la commande ne précise pas le nombre de blocs-notes de chaque sorte, comment la papeterie devrait-elle exécuter la commande ?

Exercice 5.9: Un marchand veut mélanger des cacahuètes coûtant 6 fr. la livre et des noix de cajou coûtant 16 fr. la livre, pour obtenir 60 livres d'un mélange coûtant 10 fr. la livre. Combien de livres de chaque sorte faudrait-il mélanger ?

Exercice 5.10: Le vol de Los Angeles à Albuquerque, avec une escale à Phoenix, coûte 90 fr. de Los Angeles à Phoenix et 120 fr. de Los Angeles à Albuquerque. Au total, 185 passagers sont montés dans l'avion à Los Angeles, et la recette totale a été de 21'000 fr. Combien de passagers sont descendus de l'avion à Phoenix?

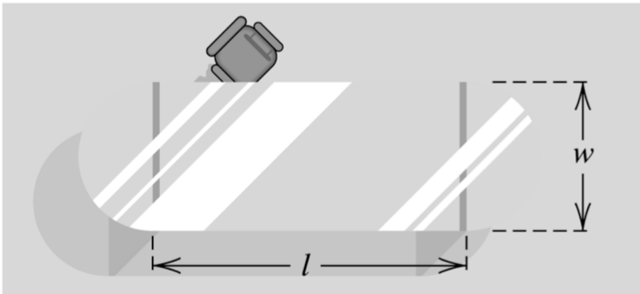
Exercice 5.11: Un crayon de 8 centimètres de long et 1 centimètre de diamètre doit être fabriqué à partir de 5 cm^3 de cire colorée. Le crayon doit avoir la forme d'un cylindre surmonté d'une petite pointe conique (voir la figure). Trouver la longueur x du cylindre et la hauteur y du cône.



Exercice 5.12: Une femme a 15'000.– fr. à investir dans deux fonds qui paient un intérêt simple à des taux de 6% et 8%. Les intérêts sur le fond à 6% sont exemptés d'impôt ; par contre, il faut payer un impôt sur les intérêts du fond à 8%. Comme la femme est dans une tranche d'imposition élevée, elle ne veut pas investir tout son argent dans le compte à 8%. Y a-t-il un moyen d'investir l'argent afin qu'elle reçoive 1'000 f. d'intérêts à la fin d'une année ?

Exercice 5.13: Un fondeur d'argent a deux alliages, l'un contenant 35 % d'argent et l'autre 60 % d'argent. Quelle quantité de chaque alliage faudrait-il fondre et mélanger pour obtenir 100 grammes d'un alliage qui contienne 50 % d'argent ?

Exercice 5.14: Une grande table de conférence doit être fabriquée en forme de rectangle avec deux demi-cercles à ses extrémités (voir la figure). La table doit avoir un périmètre de 12 mètres, et l'aire de sa partie rectangulaire doit être le double de la somme des aires de ses deux parties en demi-cercle. Trouver la longueur l et la largeur w de la partie rectangulaire de la table de conférence.

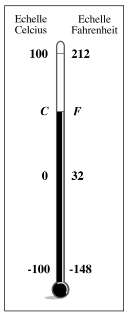


Exercice 5.15: Un avion, volant avec un vent arrière, parcourt 1'920 km en 2 heures. Le trajet de retour, effectué contre le vent, prend 2 1/2 heures. Trouver la vitesse de croisière de l'avion et la vitesse du vent (supposer que les deux vitesses sont constantes).

Exercice 5.16: La figure montre les échelles de température Celsius C et Fahrenheit F. La relation entre les 2 températures est du type :

$$C = a(F - b)$$

Déterminer a et b afin de retrouver la formule permettant de convertir les Fahrenheit en Celsius.



Exercice 5.17: Lorsqu'une balle roule le long d'un plan incliné, sa vitesse $v(t)$ (en cm/s) au temps t (en s) est donnée par $v(t) = v_0 + at$ pour une vitesse initiale v_0 et une accélération a (en cm/s^2).
Si $v(2) = 16$ et $v(5) = 25$, trouver v_0 et a.

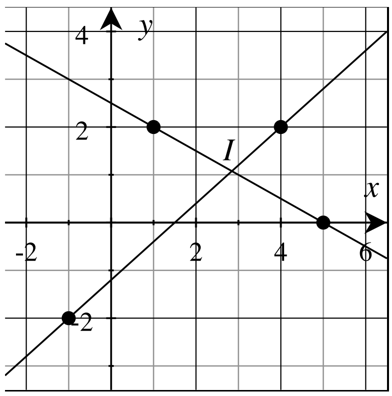
Exercice 5.18: Si un objet est projeté verticalement vers le haut d'une hauteur de s_0 mètres avec une vitesse initiale de v_0 (en m/s), sa position $s(t)$ par rapport au sol après t secondes est $-5t^2 + v_0 t + s_0$.
Si $s(1) = 95$ et $s(2) = 160$, que valent v_0 et s_0 ?

Exercice 5.19: Une petite société d'ameublement fabrique des canapés et des fauteuils. Chaque canapé nécessite 8 heures de travail et 120 fr. de matériel, alors qu'un fauteuil peut être construit pour 70 fr. en 6 heures. La société dispose de 340 heures de travail par semaine et peut se permettre d'acheter pour 4'500 fr. de matériel. Combien de fauteuils et de canapés peut-on fabriquer s'il faut utiliser toutes les heures de travail et tout le matériel ?

Exercice 5.20: Un fermier prépare un mélange d'avoine et de blé pour le bétail. 30 g d'avoine apportent 4 g de protéines et 18 g d'hydrates de carbone, et 30 g de blé fournissent 3 g de protéines et 24 g d'hydrates de carbone.
Quelle quantité (en grammes) de chaque céréale faudrait-il employer pour satisfaire à des besoins nutritionnels de 200 g de protéines et 1'320 g d'hydrates de carbone pour chaque ration ?

Exercice 5.21: Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine d'une fonction affine dont la représentation graphique passe par les points $A(-1\ ;\ 4)$ et $B(8\ ;\ -2)$

Exercice 5.22: Déterminer les coordonnées du point d'intersection I représenté sur le graphe ci-contre.



> ***Intermède curieux :*** *On considère les 3 systèmes suivants :*
>
> $$\begin{cases} 10x + 9y = 19 \\ 9x + 8y = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x + 9y = 19{,}2 \\ 9x + 8y = 16{,}9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x + 8{,}9y = 19 \\ 9{,}1x + 8{,}1y = 17 \end{cases}$$
>
> ***a)*** *les comparer « visuellement » ;*
> ***b)*** *résoudre chaque système. Que constatez-vous d'étrange ?*

Exercice Défi: Compléter ce triangle de manière à ce que le nombre inscrit dans chaque case soit égal à la somme des deux nombres inscrits dans les cases juste en dessous de celle-ci.