Collège du Sud
1-ère année

Mathématiques

Vecteurs

Edition 2003/2004 - DELM

- Supports de cours de mathématiques de degré secondaire II, lien hypertexte vers la page mère

  http://www.deleze.name/marcel/sec2/index.html

§ 1 Notion de vecteur

§ 1.1 L'exemple du vecteur vitesse

- Grandeurs scalaires

En sciences naturelles, certaines grandeurs comme
- le volume d'un corps $V = 1.3\, m^3$;
- la température d'un corps $\Theta = 4.5$ °C;
- la masse volumique d'un corps $\rho = 8200\ \frac{\text{kg}}{m^3}$;
- l'altitude d'un lieu $h = 975\, m$;
- la pression d'un fluide en un point $p = 1030$ hPa;

sont représentées par un nombre réel. De telles grandeurs sont appelées scalaires.

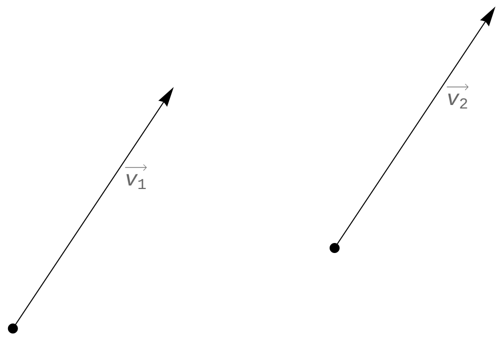
- Grandeurs vectorielles

Par contre, l'information
"j'exerce une force de $F = 1\, N$sur un plumier de masse $m = 0.1$ kgposé sur un bureau"
est insuffisante pour repésenter la situation si on n'indique pas la direction et le sens de cette force. De même, l'information
"la balle de billard se déplace à la vitesse $v = 3\ \frac{m}{s}$"
ne permet pas de se représenter le mouvement de la balle sur la table car elle n'indique ni la direction ni le sens du mouvement.

Certaines grandeurs physiques ne se laissent donc pas réduire à un seul nombre. Des grandeurs comme la force ou la vitesse sont appelées vecteurs et sont représentées par des flèches.

- Egalité de deux vecteurs

Sur une table de billard, considérons deux balles en mouvement rectiligne uniforme et posons-nous la question:
"à quelles conditions les deux balles ont-elles la même vitesse ?"



■ Première caractérisation d'un vecteur

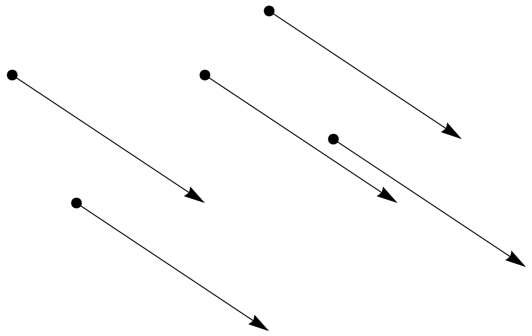
Les deux vitesses sont égales si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

- les deux flèches ont la même direction;
- les deux flèches ont le même sens et
- les deux flèches ont la même norme (longueur de la flèche).

On note alors

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$$

Ainsi, on peut représenter un vecteur par <u>une famille de flèches équivalentes</u> (le terme exact est "équipollentes")



Chaque flèche est <u>un représentant</u> du vecteur.

Pratiquement, retenons la règle suivante:

Un vecteur étant représenté par une flèche, toute translation de cette flèche représente le même vecteur.

La <u>norme</u> du vecteur $\vec{v}$ est notée avec des doubles barres verticales:

$$\|\vec{v}\|, \text{ par exemple } \|\vec{v}\| = 3\,\frac{m}{s}$$

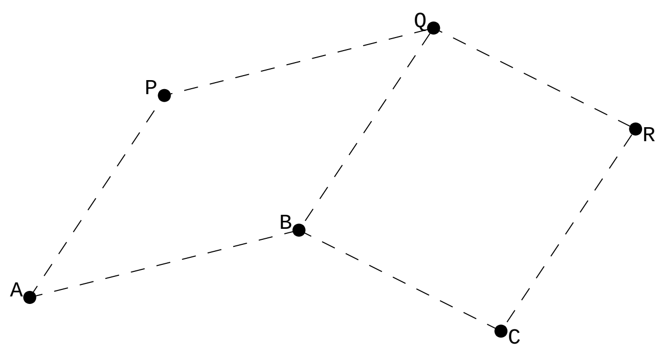
§ 1.2 Vecteurs et translations

■ Translations

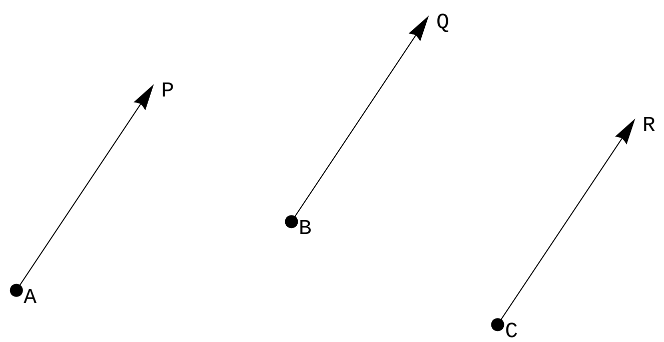
On appelle transformation du plan une opération qui, à chaque point *A*, *B*, C, ... du plan, fait correspondre un et un seul point *P*, *Q*, *R*, ... ; on dit alors que

P est l'image de *A* par la transformation;
Q est l'image de *B* par la transformation;
R est l'image de *C* par la transformation; etc.

Une telle transformation est appelée translation si, pour n'importe quels points *A*, *B* et leurs images respectives *P*, *Q*, le quadrilatère *APQB* est un parallélogramme:



Deux points rangés dans un ordre donné comme (*A*, *P*) est appelé un bipoint.
Un bipoint (*A*, *P*) définit une translation notée T_{AP}.



L'image de *C* par la translation T_{AP} est R; l'image de *C* par la translation T_{BQ} est aussi R; etc.
Il s'ensuit que les translations T_{AP}, T_{BQ} et T_{CR} sont identiques.
A la translation T_{AP} correspondent une infinité de bipoints (*A*, *P*), (*B*, *Q*), (*C*, *R*), ... qu'on dit être "équivalents" (le terme exact est "équipollents").

A chaque translation T_{AP} correspond un et un seul vecteur noté $\overrightarrow{A\,P}$.
Nous disons que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ sont égaux et nous notons

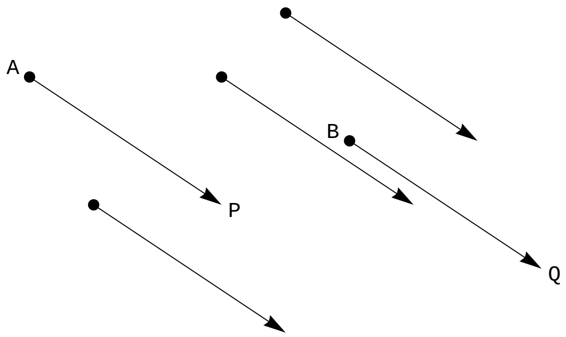
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{CR}}$$

Chaque bipoint (*A*, *P*), (*B*, *Q*), (*C*, *R*) est un représentant du même vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$.
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ désigne le vecteur dont un représentant a le point A comme origine et le point P comme extrémité.

Réciproquement, à chaque vecteur $\overrightarrow{A\,P}$ correspond une et une seule translation T_{AP}.

Deuxième caractérisation d'un vecteur

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ est l'ensemble des bipoints (B, Q) qui sont équivalents au bipoint (A, P).



Pratiquement, retenons la règle suivante:

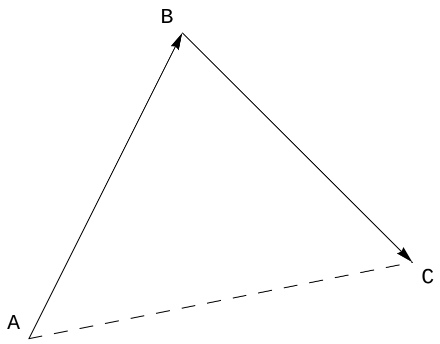
Deux vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère APQB est un parallélogramme.

§ 2 Opérations sur les vecteurs

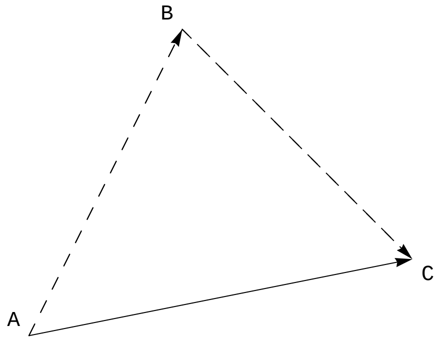
§ 2.1 Somme de vecteurs

■ Relation de Chasles

Si on applique successivement d'abord la translation T_{AB} puis la translation T_{BC},



le résultat de la composition des deux est égal à la translation T_{AC}:



En notation vectorielle, nous disons que la somme des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ est $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et nous notons

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$ (Relation de Chasles)

Pratiquement, retenons le principe:

Pour additionner deux vecteurs, on choisit des représentants qu'on met bout à bout.

■ Vecteur nul et opposé d'un vecteur

Appliquons la règle de Chasles au cas particulier $C = A$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul, et on note

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots = \vec{0}$$

Puisque l'on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on note

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$$

■ Propriétés de l'addition

1. L'addition est associative: pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ du plan (ou de l'espace), on a

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$$

Pour montrer cette première propriété, choisissons un représentant de chaque vecteur, de telle manière qu'on puisse les mettre bout à bout:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}; \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC}; \quad \vec{w} = \overrightarrow{CD}$$

D'une part, selon la relation de Chasles,

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

D'autre part,

$$\vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \qquad \blacksquare$$

2. L'addition possède un élément neutre: pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan (ou de l'espace), on a

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

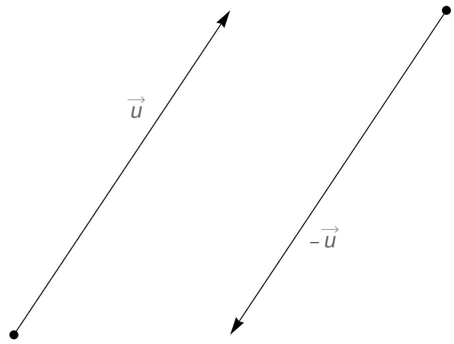
L'élément neutre pour l'addition est appelé *vecteur nul* et noté $\vec{0}$. Le vecteur nul est représenté par un point:

$\vec{0}$ •

3. Tout vecteur <u>possède un opposé</u>: pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan (ou de l'espace), il existe un vecteur $\left(-\vec{u}\right)$ tel que

$$\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\left(-\vec{u}\right)+\vec{u}=\vec{0}$$

Lorsqu'ils sont non nuls, deux vecteurs opposés sont représentés par des flèches de même direction mais de *sens opposés*:



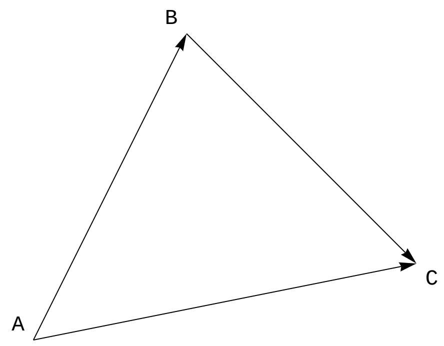
4. L'additon est <u>commutative</u>: pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ du plan (ou de l'espace), on a

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

Illustrons graphiquement cette dernière propriété. Pour chaque vecteur, choisissons un représentant:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}; \quad \vec{v}=\overrightarrow{BC}$$

Ainsi, d' une part, $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



D'autre part, pour additionner

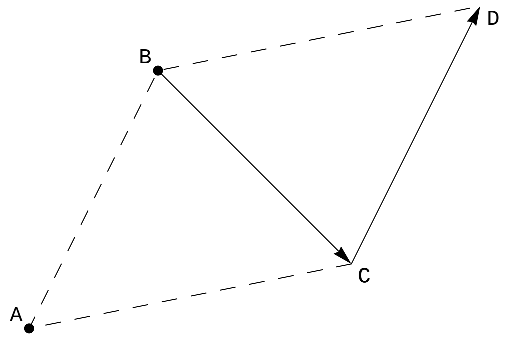
$$\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$$

choisissons des représentants que l'on peut mettre bout à bout; construisons le point D tel que

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

c'est-à-dire D est un sommet du parallélogramme $ABDC$. Ainsi

$$\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$$



Puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, il s'ensuit finalement que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \qquad \blacksquare$$

§ 2.2 Différence de deux vecteurs

Définition

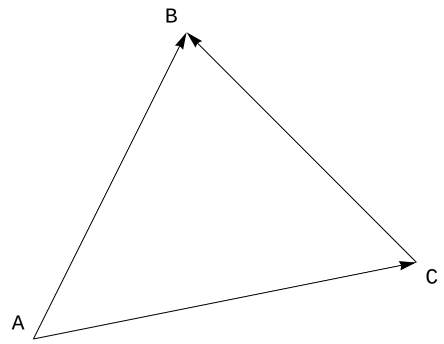
Pour soustraire deux vecteurs, on ajoute au premier l'opposé du deuxième:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$$

Avec des représentants,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

Par exemple,



$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

§ 2.3 Multiplication d'un vecteur par un nombre

- Multiplication d'un vecteur par un entier relatif

Les notations suivantes s'introduisent naturellement:

$\vec{u} + \vec{u} = 2\,\vec{u}$; $\quad \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\,\vec{u}$; $\quad$ etc .

$0\,\vec{u} = \vec{0}$; $\quad$ (distinguez le nombre 0 du vecteur $\vec{0}$)

$1\,\vec{u} = \vec{u}$;

$(-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$ $\quad$ (vecteur opposé)

$$(-2)\,\vec{u} = 2\left(-\vec{u}\right) = \left(-\vec{u}\right) + \left(-\vec{u}\right);$$

$$(-3)\,\vec{u} = 3\left(-\vec{u}\right) = \left(-\vec{u}\right) + \left(-\vec{u}\right) + \left(-\vec{u}\right); \quad \text{etc.}$$

En particulier, on remarquera que

$\vec{u}$, $3\,\vec{u}$ et $-2\,\vec{u}$ ont la même direction;

$\vec{u}$et $3\,\vec{u}$ ont le même sens;

$\vec{u}$ et $-2\,\vec{u}$ sont de sens opposés;

$\|3\,\vec{u}\| = 3\,\|\vec{u}\|$ mais $\|-2\,\vec{u}\| = 2\,\|\vec{u}\| = |-2|\,\|\vec{u}\|$.

■ Multiplication d'un vecteur par un scalaire, définitions et propriétés

Soit *k* un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur. Le produit $k\,\vec{u}$ est défini comme suit:

a) si *k* est nul ou si $\vec{u}$ est nul, alors le produit $k\,\vec{u}$ est nul :

$$0\,\vec{u} = \vec{0}; \qquad k\,\vec{0} = \vec{0};$$

b) si *k* est non nul et $\vec{u}$ est non nul, alors le produit $k\,\vec{u}$ est défini comme suit:

1) $\vec{u}$ et $k\,\vec{u}$ ont la même direction;

2) si *k* est positif, alors $\vec{u}$ et $k\,\vec{u}$ ont le même sens;
si *k* est négatif, alors $\vec{u}$ et $k\,\vec{u}$ sont de sens contraires;

3) la norme de $k\,\vec{u}$ est égale à la valeur absolue de *k* multipliée par la norme de $\vec{u}$:

$$\|k\,\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$$

k, *r* étant des nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ des vecteurs du plan ou de l'espace, on a les propriétés suivantes

$$1\,\vec{u} = \vec{u};$$

$$(k + r)\,\vec{u} = k\,\vec{u} + r\,\vec{u}$$

$$k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$$

$$k\left(r\,\vec{u}\right) = (k\,r)\,\vec{u}$$

■ Multiplication d'un vecteur par un nombre rationnel, construction

En géométrie euclidienne, "*construire*" signifie "*construire avec la règle et le compas*". A ces deux instruments, on peut ajouter l'équerre (il s'agit d'un mot féminin: on dit une équerre).

Etant donné le vecteur $\vec{u}$, soit par exemple à construire le vecteur $-\frac{8}{5}\,\vec{u}$.
Le cas échéant, la première étape consiste à extraire les entiers:

$$-\frac{8}{5}\,\vec{u} = (-1)\left(\frac{8}{5}\right)\vec{u} = (-1)\left(1 + \frac{3}{5}\right)\vec{u} = (-1)\left(\vec{u} + \frac{3}{5}\,\vec{u}\right)$$

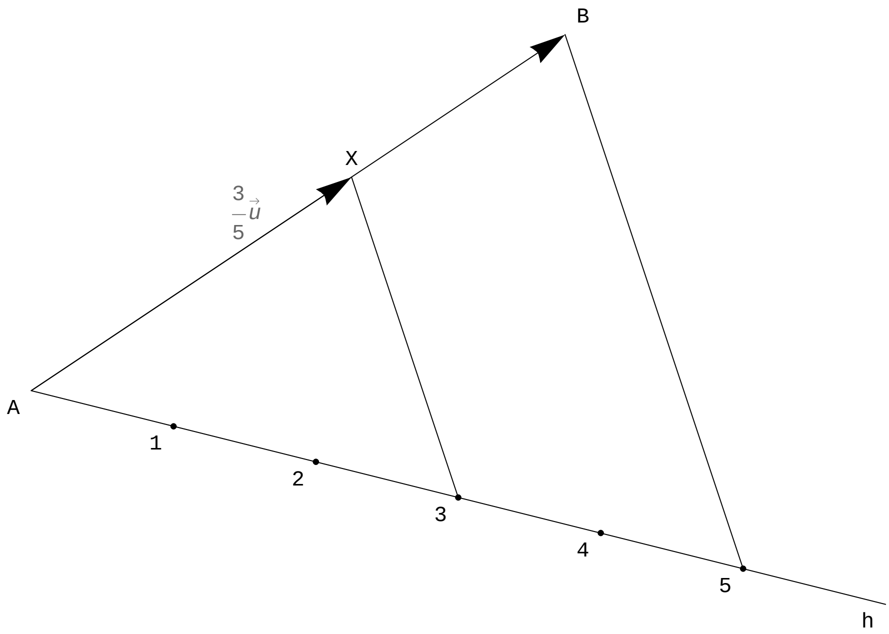
ce qui nous donne le programme de travail suivant:

1. construire le vecteur $\frac{3}{5}\,\vec{u}$;
2. au résultat précédent, ajouter le vecteur $\vec{u}$;
3. prendre l'opposé du résultat précédent.

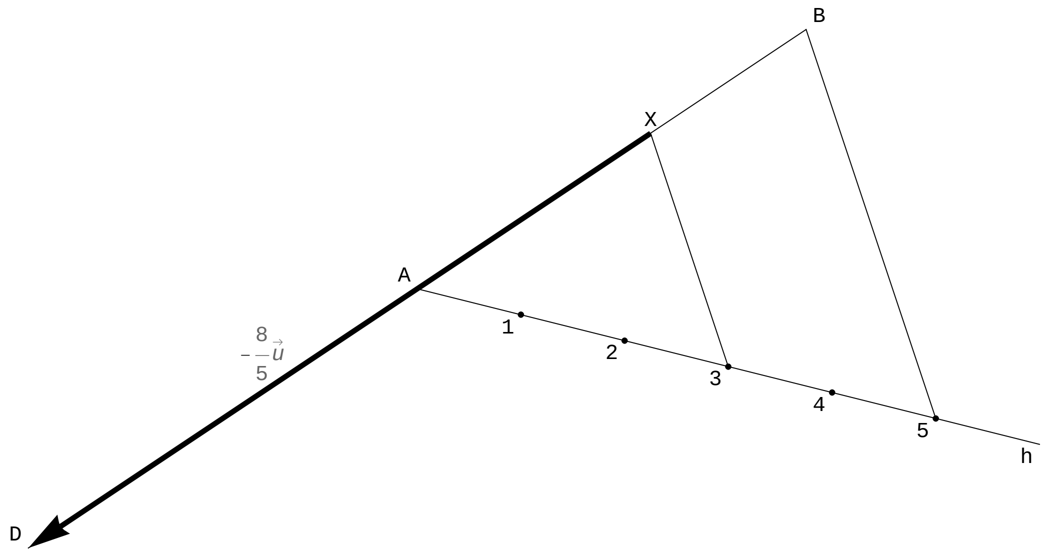
Pour construire $\frac{3}{5}\vec{u}$, on utilise le théorème de Thalès ou, ce qui revient au même, on considère des triangles semblables:

1. à partir de l'origine *A* du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on trace une droite auxiliaire *Ah*;
2. sur *Ah*, avec le compas, on reporte 5 fois la même distance; on numérote les graduations de 1 à 5;
3. on relie la 5-ème graduation et l'extrémité *B* du vecteur $\vec{u}$ par une droite;
4. par la 3-ème graduation, on trace une parallèle à la droite précédente;

   la droite coupe *AB* en un point *X* qui est l'extrémité du vecteur cherché $\frac{3}{5}\vec{u} = \overrightarrow{AX}$.



Il ne reste plus qu'à terminer la construction selon le plan de travail:



Soit *D* le point tel que $\overrightarrow{DA} = \vec{u}$. Alors

$$\overrightarrow{DX} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AX} = \vec{u} + \frac{3}{5}\vec{u} = \frac{8}{5}\vec{u}$$

Finalement,

$$-\frac{8}{5}\,\vec{u} = \overrightarrow{XD}$$

■ Multiplication d'un vecteur $\vec{u}$ par la racine carrée d'un entier, construction

Nous nous contentons de donner ici une méthode qui convient dans certaines situations simples.

Par exemple, un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ étant donné, construire $\sqrt{5}\,\vec{u}$.

1. Décomposer le nombre entier 5 en une somme de carrés

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

L'idée générale est la suivante: en prenant la longueur de $\vec{u}$ comme unité, construire un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 2 et 1; ainsi l'hypoténuse mesurera $\sqrt{5}$.

2. Construire C tel que $\overrightarrow{AC} = 2\,\vec{u}$.

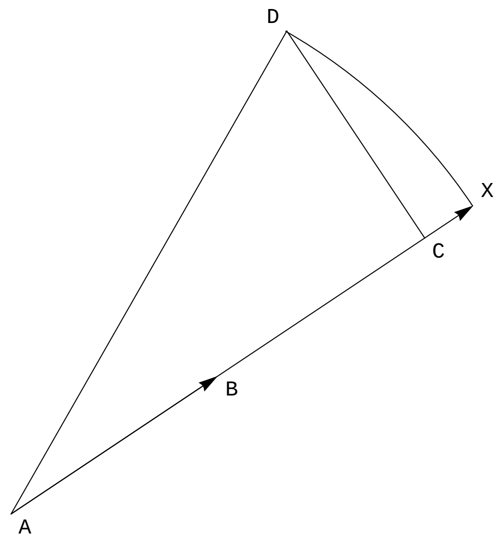
Perpendiculairement à la droite AB en C, construire D tel que $\|\overrightarrow{CD}\| = 1\,\|\overrightarrow{AB}\|$.
Au moyen du théorème de Pythagore $AC^2 + CD^2 = AD^2$, on a construit la longueur

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{\left(2\,\|\vec{u}\|\right)^2 + \left(1\,\|\vec{u}\|\right)^2} = \sqrt{5}\,\|\vec{u}\|$$ (voir figure).

3. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a la bonne longueur mais pas la bonne direction car le vecteur $\sqrt{5}\,\vec{u}$ doit avoir la même direction que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

En reportant avec le compas $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AX}\|$ sur le support de $\overrightarrow{AB}$, on obtient le résultat final

$$\sqrt{5}\,\vec{u} = \overrightarrow{AX}$$



<u>Remarques</u>

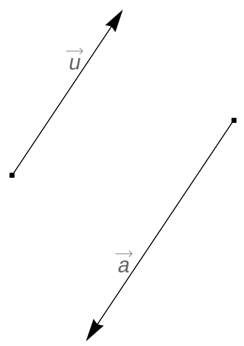
1. Dans d'autres situations, on peut être amené à considérer plusieurs triangles rectangles et à utiliser le théorème de Pythagore à plusieurs reprises.
2. Dans certains cas, au lieu d'utiliser le théorème de Pythagore, il est avantageux de faire appel au théorème de la hauteur.

§ 3 Bases

§ 3.1 Vecteurs liés (2D ou 3D)

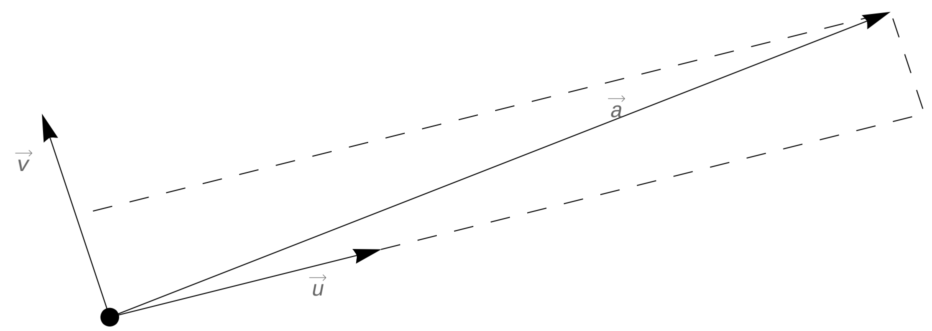
■ Combinaisons linéaires

$\vec{a}$ est une combinaison linéaire du vecteur $\vec{u}$ si et seulement si $\vec{a} = r\,\vec{u}$ pour un nombre réel r. Par exemple, $\vec{a} = -\frac{4}{3}\,\vec{u}$

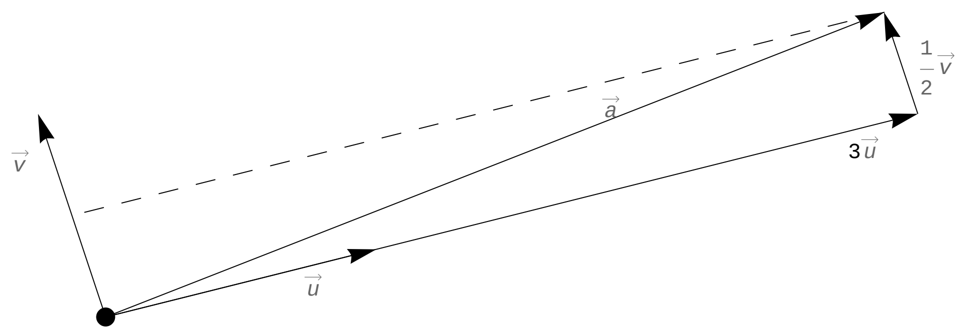


On dit aussi que $\vec{a}$ est un multiple de $\vec{u}$.

$\vec{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\vec{a} = r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$ pour des nombres réels r, s. Par exemple, $\vec{a} = 3\,\vec{u} + \frac{1}{2}\,\vec{v}$



Le figure précédente doit être lue et interprétée comme suit:



$\vec{a}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si et seulement si $\vec{a} = r\,\vec{u} + s\,\vec{v} + t\,\vec{w}$ pour des nombres réels r, s, t. Par exemple, $\vec{a} = 3\,\vec{u} + \frac{1}{2}\,\vec{v} - 2\,\vec{w}$.

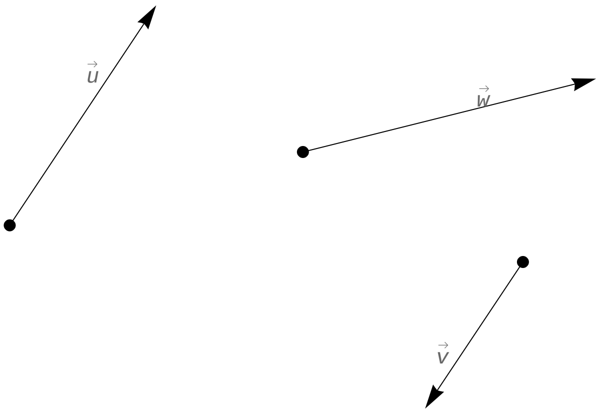
Famille de deux vecteurs liés, famille de deux vecteurs libres

Exemple

Dans la figure ci-dessous, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ satisfont aux relations

$$\vec{v} = -\frac{2}{3}\,\vec{u} \qquad \text{ou} \qquad \vec{u} = -\frac{3}{2}\,\vec{v}$$

tandis que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont des directions différentes:



Définitions

Deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont liés si et seulement si l'un (au moins) est une combinaison linéaire de l'autre, c'est-à-dire s'il existe un nombre r ou un nombre s tel que

$$\vec{v} = r\,\vec{u} \qquad \text{ou} \qquad \vec{u} = s\,\vec{v}$$

Au lieu de liés, on dit aussi colinéaires ou linéairement dépendants.

Deux vecteurs qui ne sont pas liés sont appelés libres ou linéairement indépendants.

Critères

Si l'un des deux vecteurs est nul, les deux vecteurs sont liés.
Si les deux vecteurs sont non nuls, alors
s'ils ont la même direction, ils sont liés;
s'ils ont des directions différentes, ils sont libres.

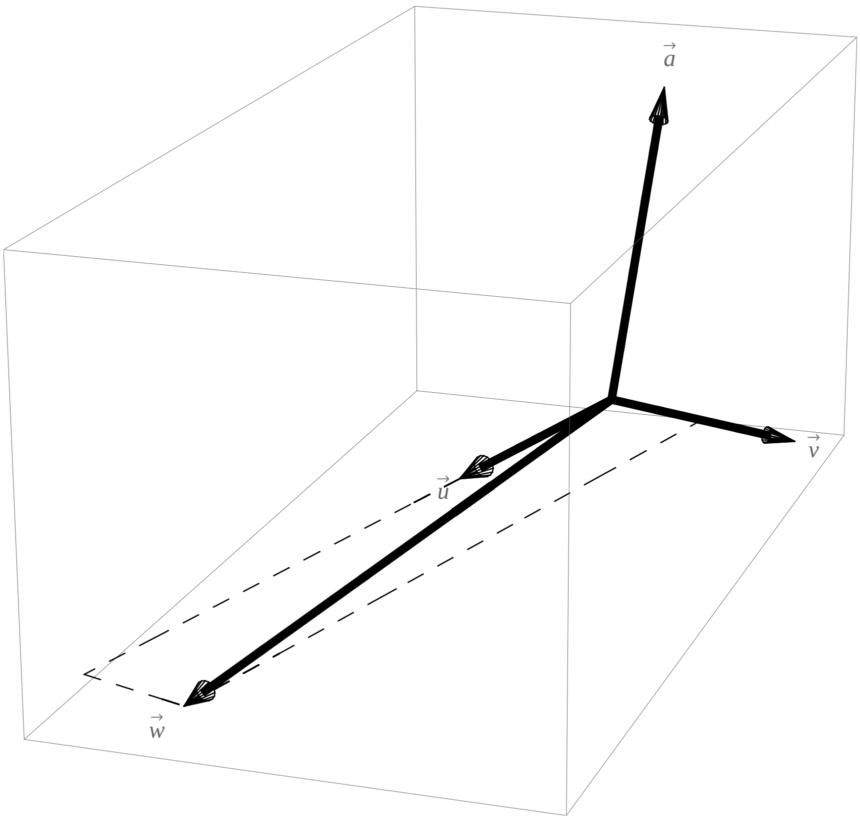
■ Famille de trois vecteurs liés, famille de trois vecteurs libres

Exemple

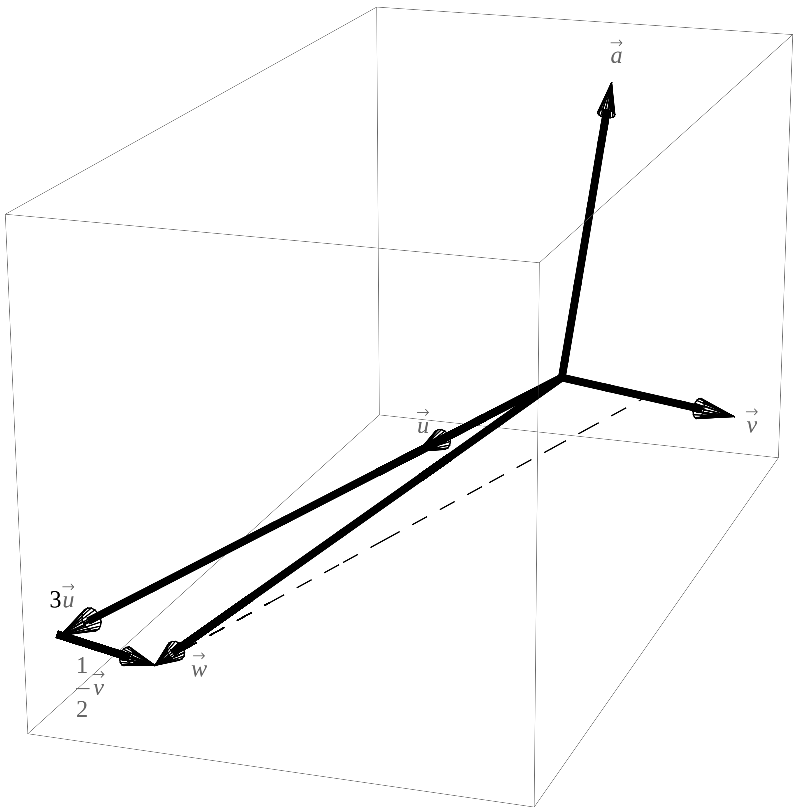
Dans la figure ci-dessous, qui est une vue en perspective de l'espace de dimension 3, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ satisfont la relation

$$\vec{w} = 3\,\vec{u} + \frac{1}{2}\,\vec{v}$$

tandis que $\vec{a}$ est un vecteur dont la direction "sort" du plan dans lequel se trouvent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



La figure précédente doit être lue et interprétée comme suit:



<u>Définitions</u>

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont <u>liés</u> si et seulement si l'un (au moins) est une combinaison linéaire des deux autres, par exemple s'il existe deux nombres réels r, s tels que

$$\vec{w} = r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$$

Au lieu de liés, on dit aussi coplanaires ou linéairement dépendants.

Par exemple, dans la figure, les vecteurs $\left\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right\}$ sont coplanaires.

Trois vecteurs qui ne sont pas liés sont appelés libres ou linéairement indépendants.

Par exemple, dans la figure, les vecteurs $\left\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{a}\right\}$ sont libres.

Critères

Si l'un des trois vecteurs est nul, les trois vecteurs sont liés.
Si deux des trois vecteurs sont liés, les trois vecteurs sont liés.
Si les trois vecteurs sont dans un même plan, ils sont coplanaires, donc ils sont liés.
S'il n'existe pas de plan contenant un représentant de chaque vecteur, les trois vecteurs sont libres.

■ Droite vectorielle, plan vectoriel

Un vecteur $\vec{u}$ non nul étant donné, l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ est appelé droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$. La droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.

Deux vecteurs libres $\vec{u}$, $\vec{v}$ étant donnés, l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ est appelé plan vectoriel engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$. Le plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.

§ 3.2 Bases et vecteurs-colonnes

■ Base 2D

Dans le plan vectoriel, choisir une base consiste à choisir deux vecteurs qui permettent de représenter tous les vecteurs sous la forme d'une combinaison linéaire, et ce d'une manière unique. Plus précisément, deux vecteurs rangés dans un ordre donné $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ forment une base du plan vectoriel si et seulement si

1° tout vecteur $\vec{v}$ du plan vectoriel peut être écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$

$$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$ et

2° toute combinaison linéaire de $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ est unique

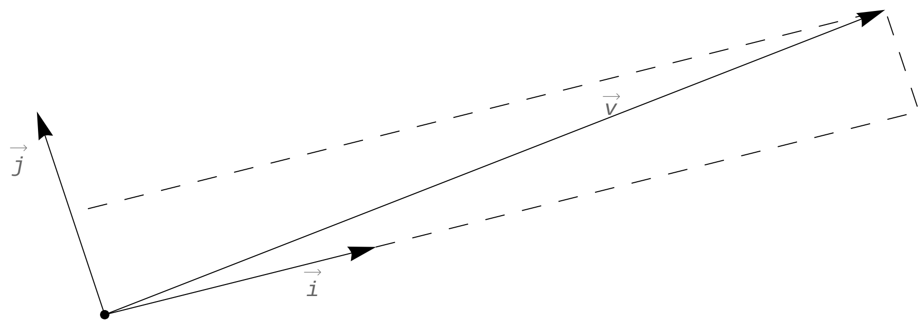
$$x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} \quad\Longrightarrow\quad (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2)$$

Il est alors d'usage d'écrire les vecteurs du plan sous la forme de vecteurs-colonnes

$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ se note aussi $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ par rapport à la base } \left(\vec{i},\ \vec{j}\right)}$

x est la première composante numérique du vecteur $\vec{v}$; y est la deuxième composante numérique du vecteur $\vec{v}$.

Par exemple, la base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ étant fixée, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ représente le vecteur $\vec{v} = 3\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}$



La première composante de $\vec{v}$ vaut 3; la deuxième composante de $\vec{v}$ vaut $\frac{1}{2}$.

Remarquez que la base est une liste ordonnée de deux vecteurs!

De la définition de la base, il s'ensuit immédiatement que

deux vecteurs-colonnes sont égaux si et seulement si

les premières composantes sont égales entre elles et les deuxièmes composantes sont égales entre elles:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2)}$$

On peut aussi caractériser une base du plan vectoriel comme suit:

si deux vecteurs $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ sont libres, alors ils forment une base du plan vectoriel.

■ Somme de vecteurs-colonnes 2D

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}\right) + \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}\right) = (x_1 + x_2)\,\vec{i} + (y_1 + y_2)\,\vec{j} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}}$$

En mots: pour additionner deux vecteurs-colonnes, on additionne les premières composantes entre elles et les deuxièmes composantes entre elles. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 6 \\ 7 + (-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

■ Multiplication d'un vecteur-colonne 2D par un scalaire

$$r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \left(x \vec{i} + y \vec{j}\right) = (r\,x)\,\vec{i} + (r\,y)\,\vec{j} = \begin{pmatrix} r\,x \\ r\,y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,x \\ r\,y \end{pmatrix}}$$

En mots: pour multiplier un vecteur-colonne par un nombre réel, on multiplie chaque composante par le nombre. Par exemple,

$$4 \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,(-3) \\ 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix}$$

■ Différence de deux vecteurs-colonnes 2D

Il suffit d'enchaîner les deux règles précédentes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (-x_2) \\ y_1 + (-y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}}$$

En mots: pour soustraire deux vecteurs-colonnes, on soustrait les premières composantes entre elles et les deuxièmes composantes entre elles. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 6 \\ 7 - (-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

■ Base 3D

Dans l'espace vectoriel de dimension 3, choisir une base consiste à choisir trois vecteurs qui permettent de représenter <u>tous</u> les vecteurs sous la forme d'une combinaison linéaire, et ce d'une manière <u>unique</u>. Plus précisément, trois vecteurs $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ forment <u>une base des vecteurs de l'espace</u> si et seulement si

1° <u>tout</u> vecteur $\vec{v}$ peut être écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad \text{et}$$

2° toute combinaison linéaire de $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est <u>unique</u>

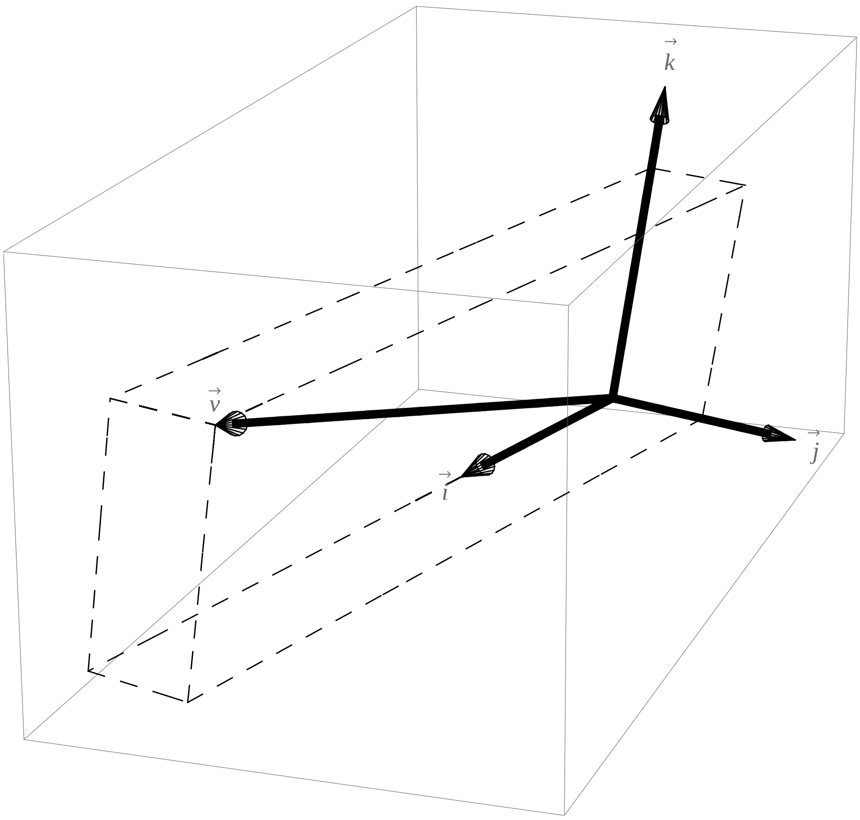
$$x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad (x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \text{ et } z_1 = z_2)$$

Il est alors d'usage d'écrire les vecteurs du plan sous la forme de vecteurs-colonnes

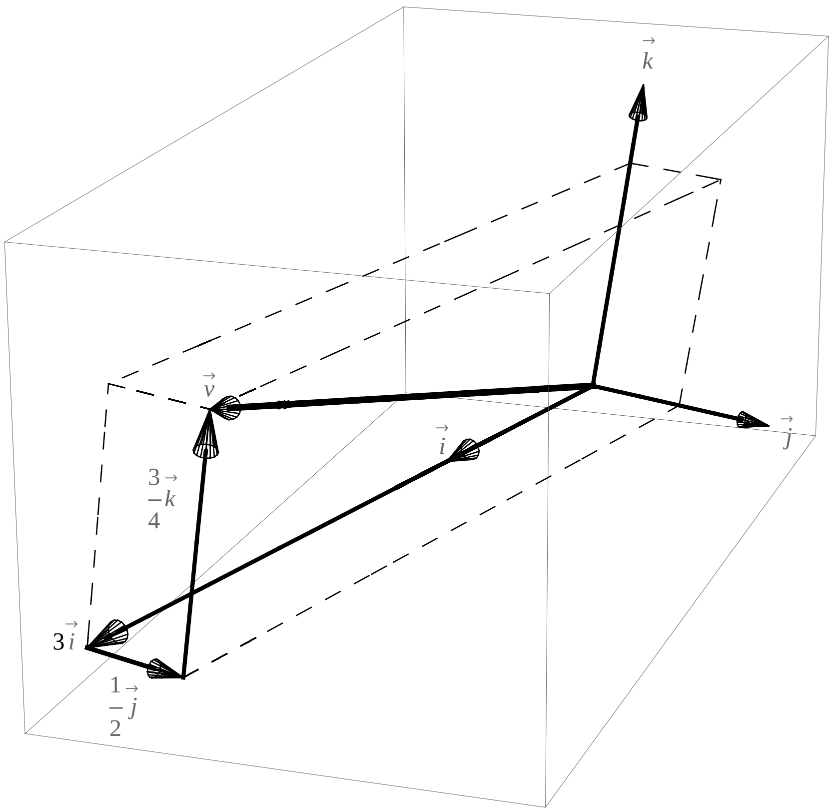
$$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \quad \text{se note aussi} \quad \boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ par rapport à la base } \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)}$$

x est la <u>première composante</u> du vecteur $\vec{v}$; y est la <u>deuxième composante</u> du vecteur $\vec{v}$; z est la <u>troisième composante</u> du vecteur $\vec{v}$.

Par exemple, la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ étant fixée, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ représente le vecteur $\vec{v} = 3\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j} + \frac{3}{4}\,\vec{k}$



La figure précédente doit être lue et interprétée comme suit:



La première composante de $\vec{v}$ vaut 3; la deuxième composante de $\vec{v}$ vaut $\frac{1}{2}$; la troisième composante de $\vec{v}$ vaut $\frac{3}{4}$.
Remarquez que la base est une liste <u>ordonnée</u> de trois vecteurs!

De la définition de la base, il s'ensuit immédiatement que

deux vecteurs-colonnes sont égaux si et seulement si les premières composantes sont égales entre elles,

les deuxièmes composantes sont égales entre elles et les troisièmes composantes sont égales entre elles:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \ \text{ et } \ z_1 = z_2)}$$

On peut aussi caractériser une base de l'espace vectoriel de dimension 3 comme suit:

si trois vecteurs $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ sont libres, alors ils forment une base des vecteurs de l'espace.

■ Opérations avec les vecteurs-colonnes 3D

Les règles de calcul sont semblables à celles de la dimension deux:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,x \\ r\,y \\ r\,z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

§ 3.3 Déterminants (2D)

■ Introduction

La définition générale "*deux vecteurs sont liés si ...*" du § 3.1 fait intervenir une inconnue que nous avons désignée par *r* ou *s*. On aimerait maintenant disposer d'un critère dans lequel n'apparaisse aucune de ces inconnues. Un tel critère permettra de simplifier la résolution de certains problèmes.

Considérons le cas suivant:

pour deux vecteurs du plan, le premier vecteur est une combinaison linéaire du deuxième

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} = s\,\vec{v}$$

Nous allons montrer que la quantité suivante $x_1\,y_2 - y_1\,x_2$ est nulle. En effet,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = s\,x_2 \\ y_1 = s\,y_2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$x_1\,y_2 - y_1\,x_2 = (s\,x_2)\,y_2 - (s\,y_2)\,x_2 = s\,x_2\,y_2 - s\,x_2\,y_2 = 0$$

Réciproquement, considérons deux vecteurs pour lesquels la quantité $x_1\,y_2 - y_1\,x_2$est nulle. Montrons que, dans le cas où $x_2 \neq 0$, les deux vecteurs sont liés:

$$x_1\,y_2 - y_1\,x_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y_1 = \frac{x_1\,y_2}{x_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right) y_2 = s\,y_2 \quad \text{où nous avons posé} \quad s = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1\,x_2}{x_2} \\ \frac{x_1\,y_2}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2}\,x_2 \\ \frac{x_1}{x_2}\,y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,x_2 \\ s\,y_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

En considérant encore les autres cas, on peut achever la démonstration de la proposition suivante:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \ \text{sont liés} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1\,y_2 - y_1\,x_2 = 0$$

Nous allons maintenant exprimer cette proposition au moyen de la définition et du critère qui suivent.

■ Définition du déterminant

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs exprimés dans cette base.

La quantité suivante est appelée déterminant des deux vecteurs et on utilise les notations suivantes

$$\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

■ Critère de dépendance linéaire

Proposition:

$$\boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ sont liés} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0}$$

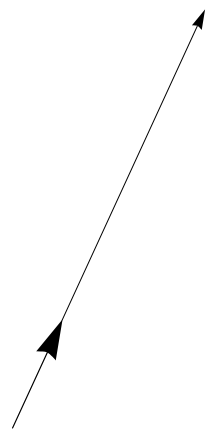
Conséquence:

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ sont libres} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$$

■ Exemple d'application

Les vecteurs suivants sont-ils libres ou liés

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 50 \end{pmatrix} \quad ?$$



Une figure nous permet seulement de dire que ces deux vecteurs sont approximativement liés, mais pas de savoir s'ils sont vraiment liés. Seul un calcul permet de trancher:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 50 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 23 \\ 13 & 50 \end{vmatrix} = 6 \cdot 50 - 13 \cdot 23 = 1$$

La conclusion est que les deux vecteurs sont libres!

■ Remarque finale

La théorie des déterminants qui précède n'est valable qu'en dimension 2. Pour des vecteurs de dimension 3, il faut utiliser les critères exposés dans le § 3.1.

§ 3.4 Vecteurs orthogonaux (2D)

■ Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ sont <u>orthogonaux</u> si et seulement si leurs directions sont perpendiculaires. On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

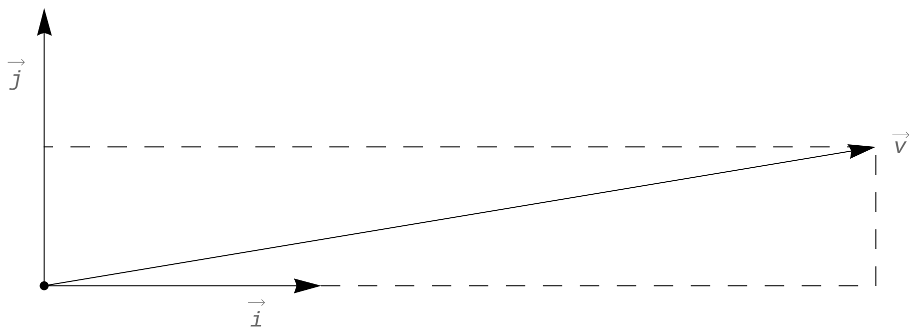
On convient de plus que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur: $\vec{0} \perp \vec{v}$.

■ Base orthonormée 2D

Une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est <u>orthonormée</u> si et seulement si les vecteurs de base sont orthogonaux et sont de norme 1, c'est-à-dire

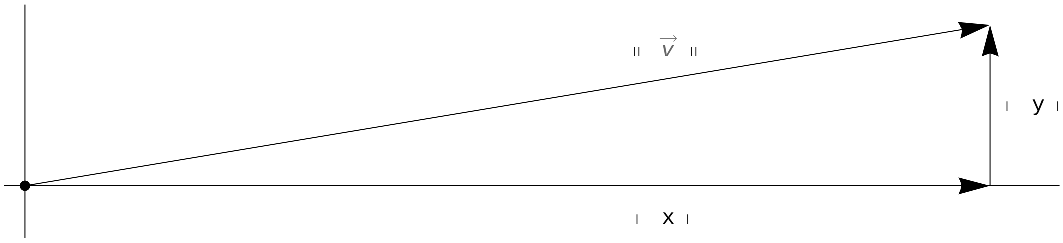
$$\vec{i} \perp \vec{j}, \qquad \left\|\vec{i}\right\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \left\|\vec{j}\right\| = 1.$$

La représentation usuelle d'une base orthonormée est la suivante; pour l'exemple, on a pris le vecteur $v = 3\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}$



■ Calcul de la norme d'un vecteur

Par rapport à une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Comment calculer la norme du vecteur ?



Calculons d'abord les longueurs des cathètes:

$$\left\|x\,\vec{i}\right\| = |x| \left\|\vec{i}\right\| = |x| \qquad \text{où } |x| \text{ désigne la valeur absolue de } x;$$

$$\left\|y\,\vec{j}\right\| = |y| \left\|\vec{j}\right\| = |y| \qquad \text{où } |y| \text{ désigne la valeur absolue de } y.$$

La norme du vecteur correspond à l'hypoténuse du triangle rectangle. Selon le théorème de Pythagore,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(|x|)^2 + (|y|)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

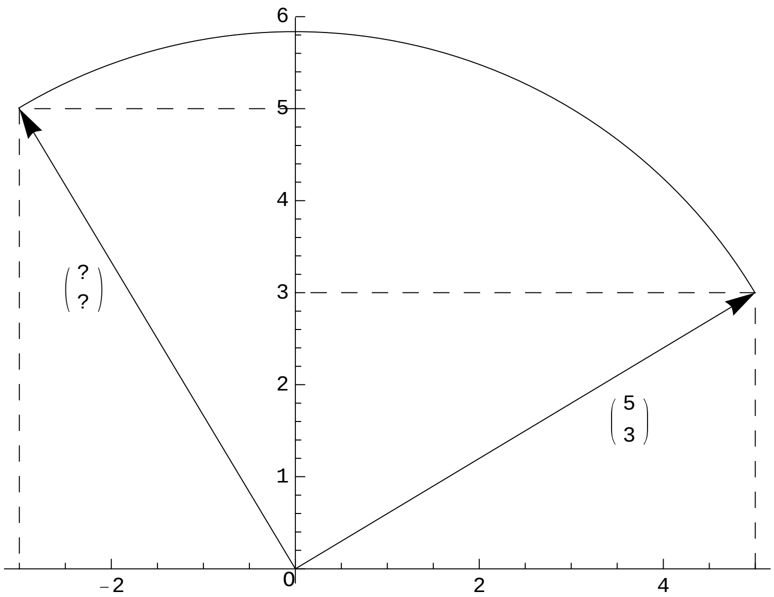
$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Rotation d'un quart de tour dans le sens direct

Dans une base orthonormée, nous aimerions faire tourner le vecteur suivant

$$\vec{v} = \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

de 90° dans le sens direct autour du point O. En mathématiques, le "sens direct" désigne le sens inverse des aiguilles de la montre.

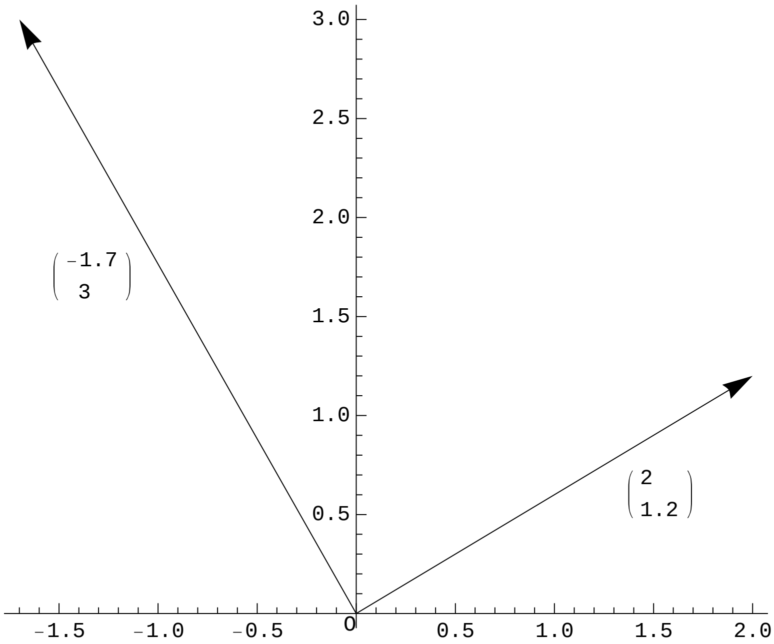


L'image de $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ par la rotation d'un quart de tour est $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ce que nous notons $R\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Plus généralement, l'image du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ par la rotation d'un quart de tour dans le sens direct est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, ce que nous notons

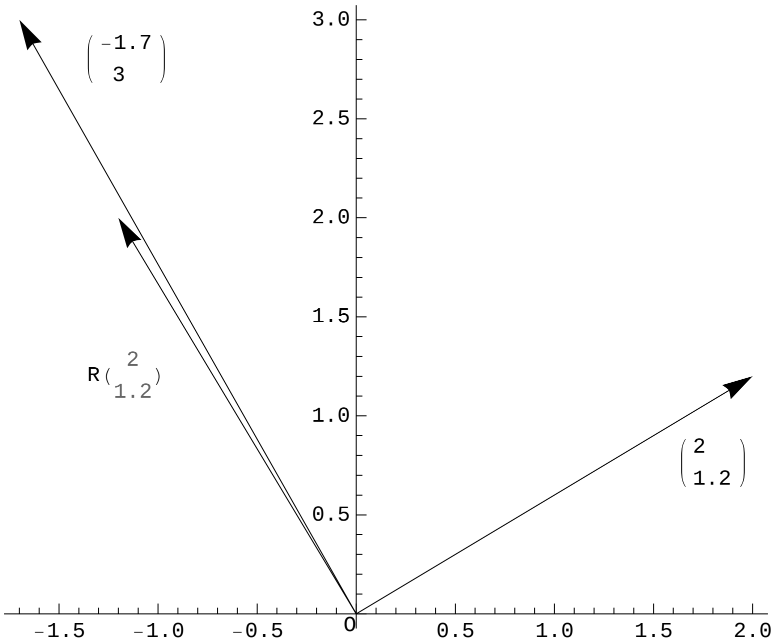
$$\boxed{R\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}$$

Critère d'orthogonalité

Par rapport à une base orthonormée, considérons maintenant deux vecteurs $\begin{pmatrix} -1.7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1.2 \end{pmatrix}$ et posons-nous la question : sont-ils orthogonaux ? Une figure nous permet seulement de voir qu'ils sont approximativement orthogonaux mais pas de voir s'ils sont vraiment orthogonaux:



Il nous faudrait disposer d'un critère algébrique. Une idée est la suivante: faisons tourner le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1.2\end{pmatrix}$ d'un quart de tour puis déterminons si les vecteurs $\begin{pmatrix}-1.7\\3\end{pmatrix}$ et $R\begin{pmatrix}2\\1.2\end{pmatrix}$ sont liés:



$$\det\left(\begin{pmatrix}-1.7\\3\end{pmatrix}, R\begin{pmatrix}2\\1.2\end{pmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}-1.7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1.2\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}-1.7 & -1.2\\3 & 2\end{vmatrix} = -1.7\cdot 2 - 3\,(-1.2) = 0.2$$

En conclusion, les deux vecteurs donnés ne sont pas orthogonaux.

Généralisons la méthode

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \det\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, R\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) = 0 \qquad \text{où}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, R\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-y_2\\x_2\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}x_1 & -y_2\\y_1 & x_2\end{vmatrix} = x_1 x_2 - y_1 (-y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Par rapport à une bas orthonormée, le critère d'orthogonalité est

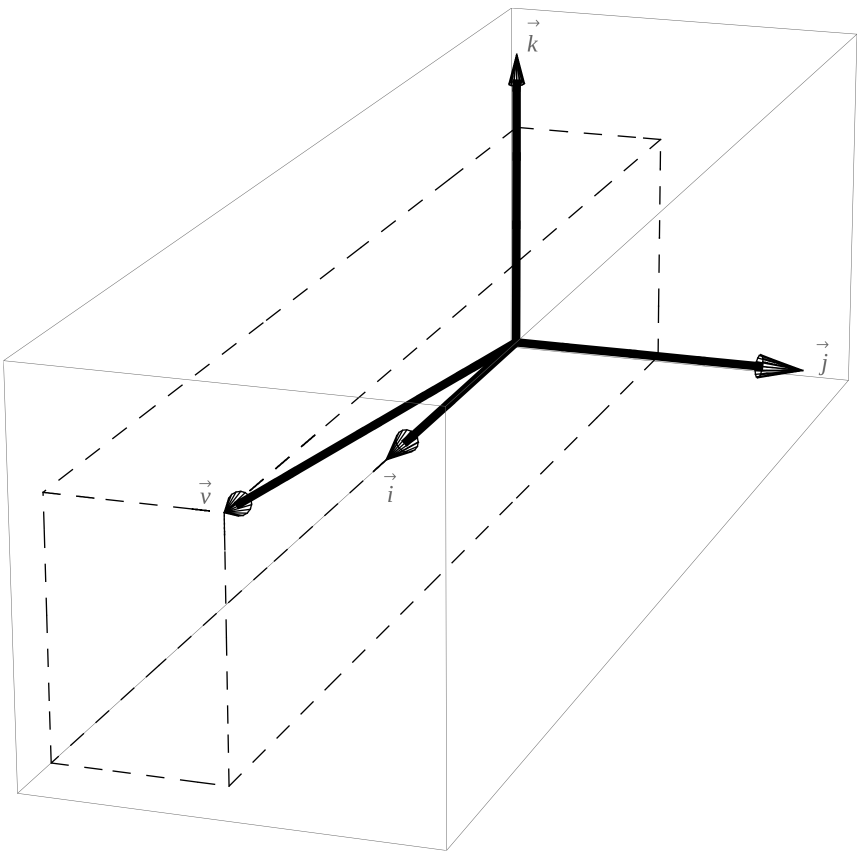
$$\boxed{\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0}$$

§ 3.5 Bases orthonormées 3D

Une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormée si et seulement si les vecteurs de base sont orthogonaux et sont de norme 1, c'est-à-dire

$$\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k}, \qquad \|\vec{i}\| = 1,\ \|\vec{j}\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \|\vec{k}\| = 1.$$

La représentation usuelle d'une base orthonormée est la suivante; pour l'exemple, on a pris le vecteur $\vec{v} = 3\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j} + \frac{3}{4}\,\vec{k}$



§ 4 Repères et coordonnées

Nous faisons une nette distinction entre vecteurs et points:

Un vecteur est exprimé en composantes par rapport à une base.	Un point est exprimé en coordonnées par rapport à un repère.

Nous allons aussi calculer les composantes d'un vecteur à partir des coordonnées de deux points.

§ 4.1 Points du plan

■ Repère du plan ponctuel

L'ensemble des points du plan est appelé <u>plan ponctuel</u> ou, plus simplement, plan.

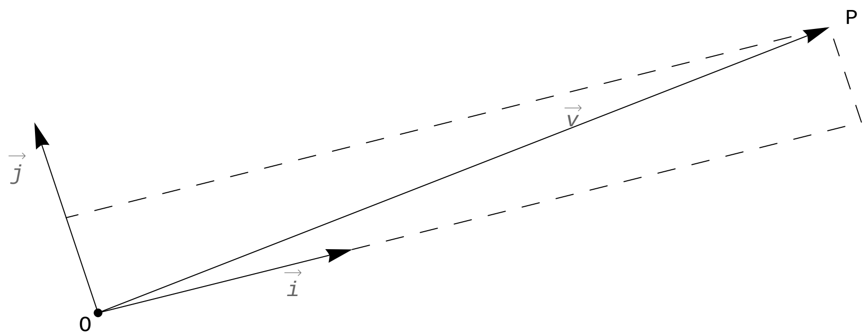
Un <u>repère</u> est une liste $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ dans laquelle

O est un <u>point</u> dénommé *origine du repère* et

$\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ est une <u>base</u> du plan vectoriel.

■ Coordonnées d'un point

Soit P un point du plan. On dit que le point P a les coordonnées $(x,\ y)$ par rapport au repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ a les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par rapport à la base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$.



On note

$$P\left(3;\ \frac{1}{2}\right) \qquad \text{car} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Plus généralement,

$$\boxed{P\,(x;\ y)\ \text{dans le repère}\ \left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}$$

x est appelé <u>abscisse</u> du point P;
y est appelé <u>ordonnée</u> du point P;
$(x,\ y)$ sont les <u>coordonnées</u> de P.

■ Vecteur défini par un représentant

Deux points étant donnés par leurs coordonnées,

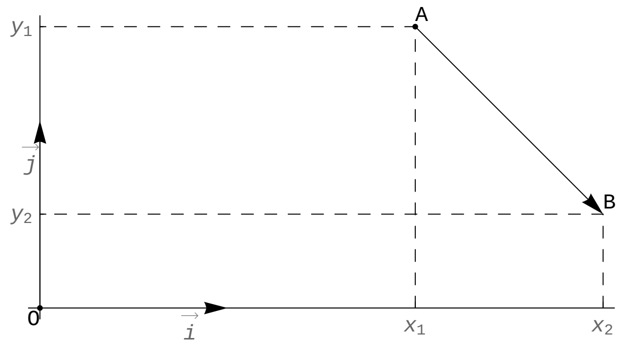
$$A\,(x_1;\ y_1), \qquad B\,(x_2;\ y_2)$$

quelles sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$?

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

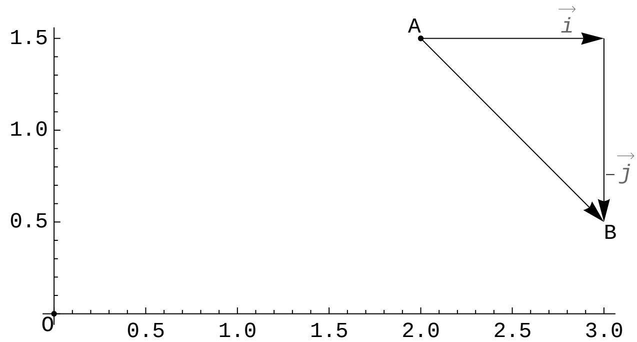
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}}$$

Par exemple, pour $A\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$, $B\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$, on a



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$$

qu'on peut interpréter géométriquement comme suit



§ 4.2 Points de l'espace

■ Repère de l'espace ponctuel

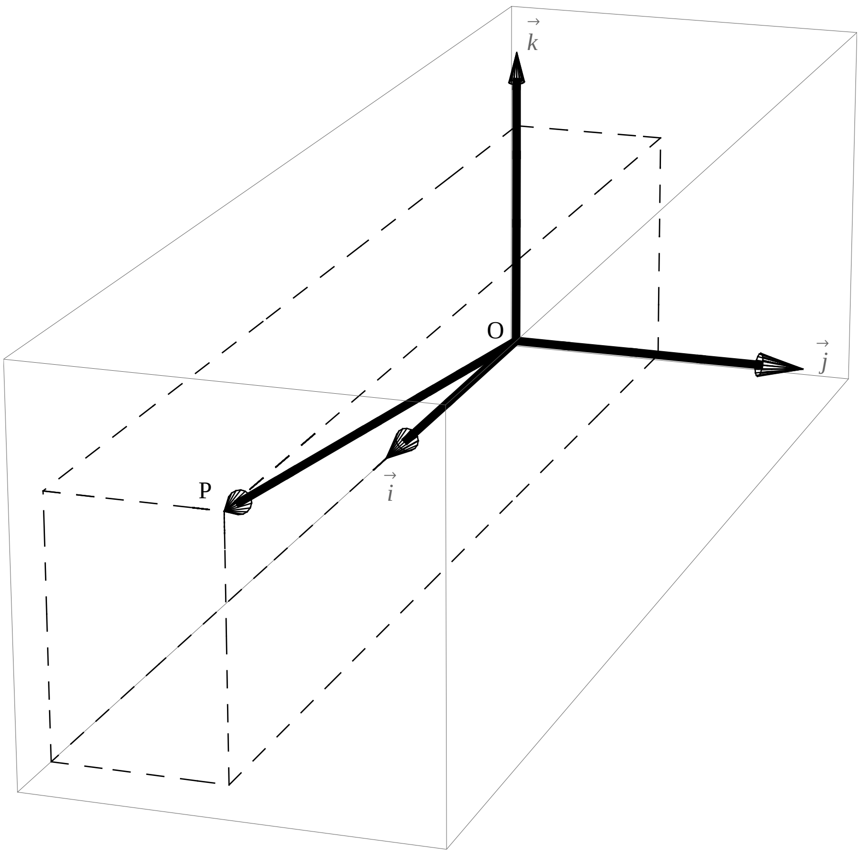
L'ensemble des points de l'espace est appelé <u>espace ponctuel</u> ou, plus simplement, espace.

Un <u>repère</u> est une liste $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ dans laquelle

> O est un <u>point</u> dénommé *origine du repère* et
>
> $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est une <u>base</u> des vecteurs de l'espace.

■ Coordonnées d'un point

Soit P un point de l'espace. On dit que le point P a les coordonnées $(x,\ y,\ z)$ par rapport au repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a les composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par rapport à la base $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.



Par exemple, on note

$$P\left(3;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right) \qquad \text{car} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Plus généralement,

$$\boxed{P\,(x;\ y;\ z) \text{ dans le repère } \left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right) \iff \overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}$$

x est appelé <u>abscisse</u> du point *P;*
y est appelé <u>ordonnée</u> du point *P;*
z est appelé <u>cote</u> du point *P;*
(*x*, *y*, *z*) sont les <u>coordonnées</u> de *P*.

■ Vecteur défini par un représentant

Deux points étant donnés par leurs coordonnées,

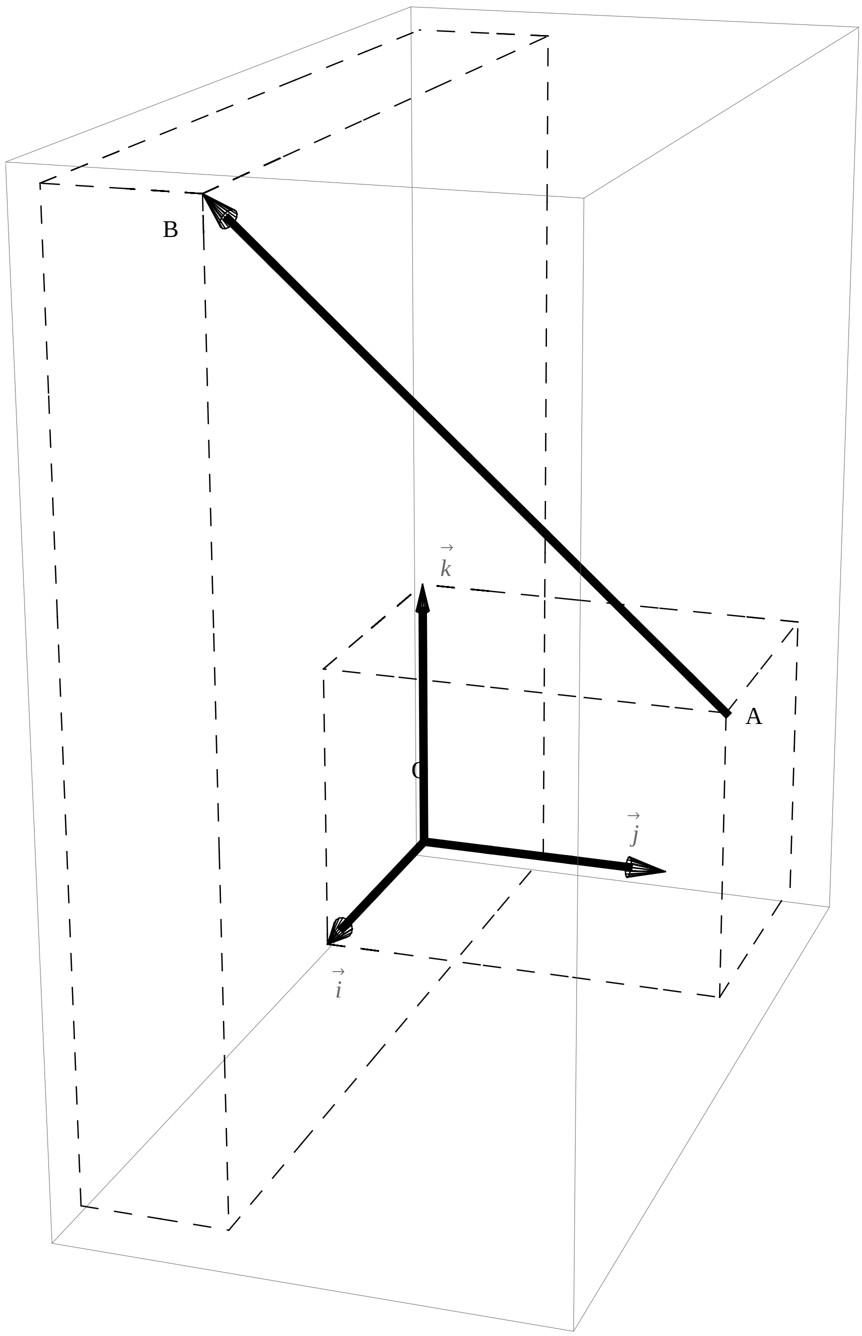
$$A\,(x_1;\ y_1;\ z_1), \qquad B\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$$

quelles sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

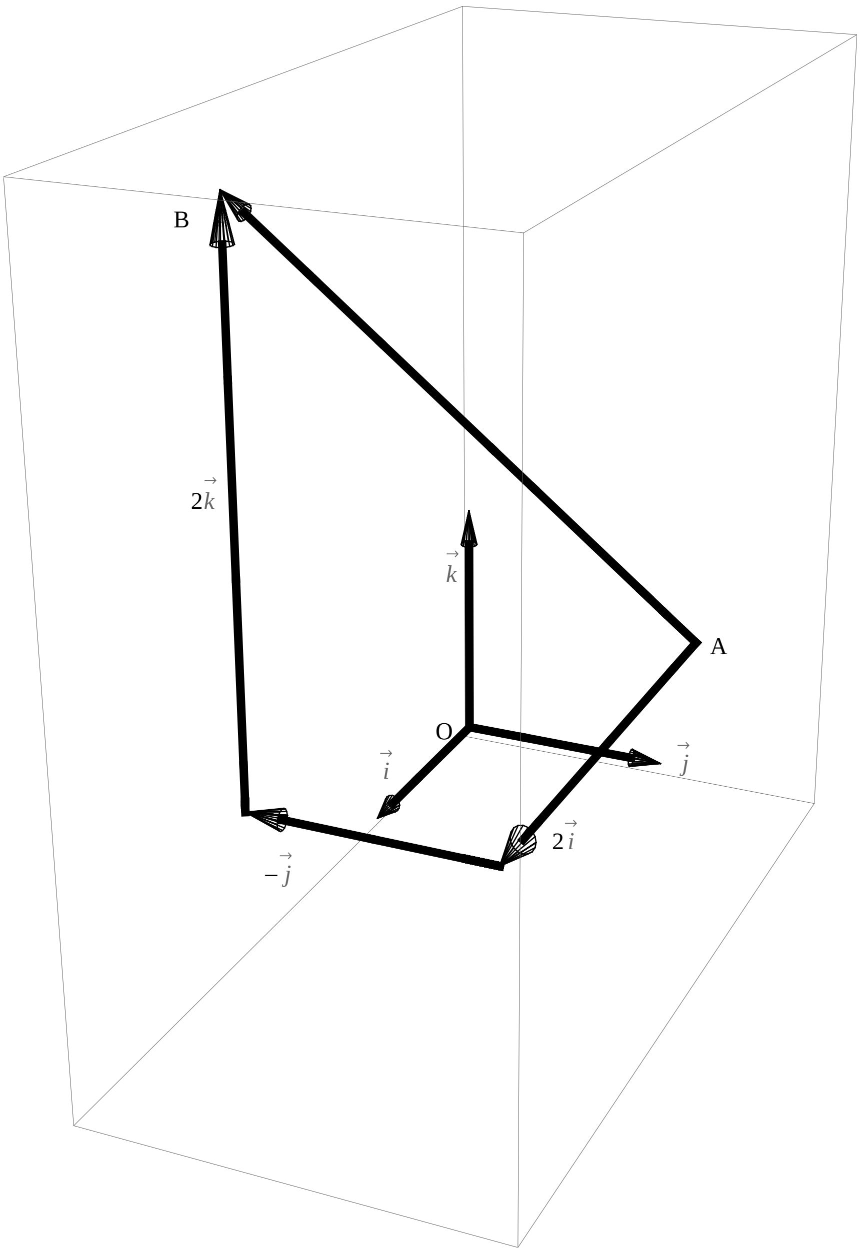
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}}$$

Par exemple, pour $A\left(1,\ \frac{3}{2},\ 1\right)$, $B\left(3,\ \frac{1}{2},\ 3\right)$, on a



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2} \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}$$

qu'on peut interpréter géométriquement comme suit:


B
$2\vec{k}$
$\vec{k}$
A
O
$\vec{i}$
$\vec{j}$
$2\vec{i}$
$-\vec{j}$