Géométrie - Vecteurs et coordonnées

Gymnase de Burier

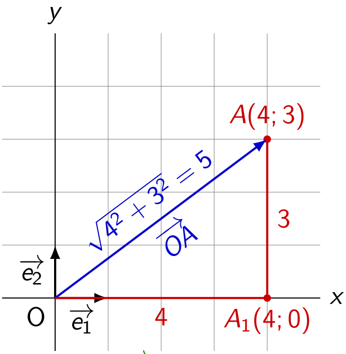
S. Rochat

1MSt

Chapitre 4 - Norme et produit scalaire

Norme d'un vecteur

Soit $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ un **repère orthonormé**, $A(4;3)$ un point et $\overrightarrow{OA}$ le vecteur associé. Quelle est la norme (= la **longueur**) du vecteur $\overrightarrow{OA}$?



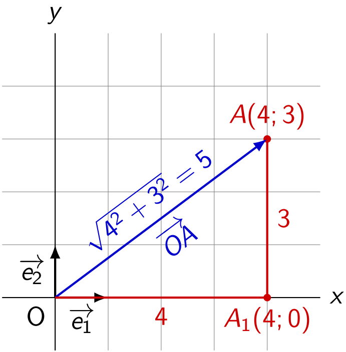
Le triangle OA_1A et rectangle. On peut donc utiliser Pythagore pour calculer la longueur :

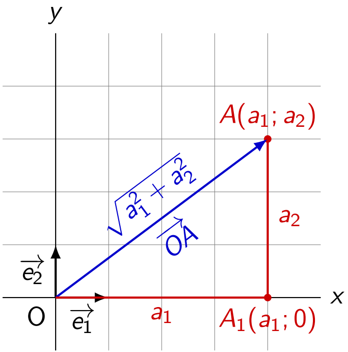
$$\boxed{\text{hypothénuse} = \sqrt{\text{cathète}_x{}^2 + \text{cathète}_y{}^2}}$$

On a donc ici : $\sqrt{4^2+3^2} = 5$

On écrit $\|\overrightarrow{OA}\| = 5$ et on dit que la norme de $\overrightarrow{OA}$ vaut 5.

Quelle est la norme d'un vecteur $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$?





La norme d'un vecteur $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dans un **repère orthonormé** est donnée par :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$

Vecteur unitaire

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est dit unitaire si sa norme est égale à 1

$$\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = 1}$$

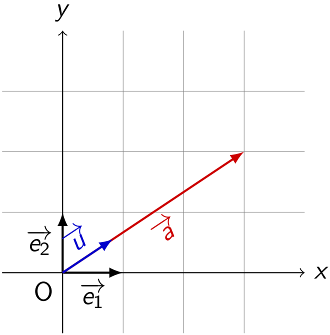
Exemple : Les vecteurs suivants sont-ils unitaires ?

- $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$? $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow$ Non
- $\overrightarrow{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$? $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1 \Rightarrow$ Oui

Pour trouver **le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de même sens et de même direction** qu'un vecteur donné $\overrightarrow{a}$, il suffit de diviser les composantes de $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ par la norme du vecteur :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|\overrightarrow{a}\|} \\ \frac{a_2}{\|\overrightarrow{a}\|} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Exemple : Trouver le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de même sens et de même direction que le vecteur $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?



On calcule la norme de $\overrightarrow{a}$:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

On a donc

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{13} + \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = \sqrt{1} = 1$$

Norme

On peut simplifier le calcul de la norme en utilisant la formule suivante :

$$\boxed{\left\|k \cdot \overrightarrow{a}\right\| = |k| \cdot \left\|\overrightarrow{a}\right\|}$$

Exemple :

$$\left\|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\right\| = \left\|-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \left|-\frac{1}{2}\right| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Produit scalaire

Propriété

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si

$$\boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}$$

Définition

On appelle l'expression $a_1 b_1 + a_2 b_2$ le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et on le note :

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Exemple : Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17$$