GYMNASE DE BURIER

Géométrie vectorielle

Chapitre 4 - Norme et produit scalaire

Sarah Dégallier Rochat

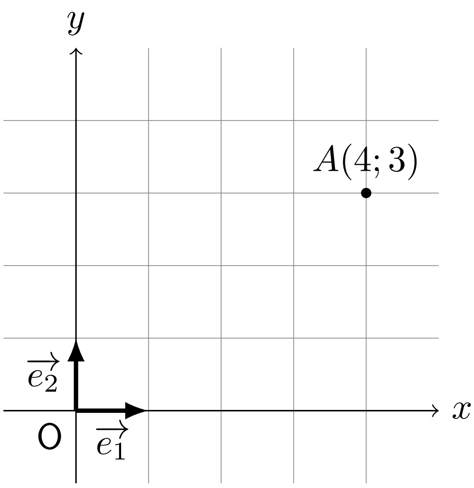
1. Norme d'un vecteur

Définition 1.1 La norme d'un vecteur $\overrightarrow{a}$, notée $||\overrightarrow{a}||$, est la **longueur d'un représentant de** $\overrightarrow{a}$. Un vecteur dont **la norme est égale à 1** est dit unitaire.

Définition 1.2 Deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont orthogonaux s'ils ont des directions **perpendiculaire**. On le note $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Définition 1.3 Une base est dite orthonormée si elle est composée de deux vecteurs **orthogonaux et unitaires**. Un repère est dit orthonormé s'il est associé à une base orthonormée.

<u>Exemple 1.1 (Calcul de la norme)</u> Soit $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ un **repère orthonormé**, $A(4;3)$ un point et $\overrightarrow{OA}$ le vecteur associé. Quelle est la norme du vecteur $\overrightarrow{OA}$?



<u>Propriété 1.1</u> La norme d'un vecteur $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dans un **repère orthonormé** est donnée par :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$

<u>Exercice 1.2</u> Calculer la norme de vecteurs suivants.

1. $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{AB}$ avec $A(-2;0)$ et $B(4;-2)$.

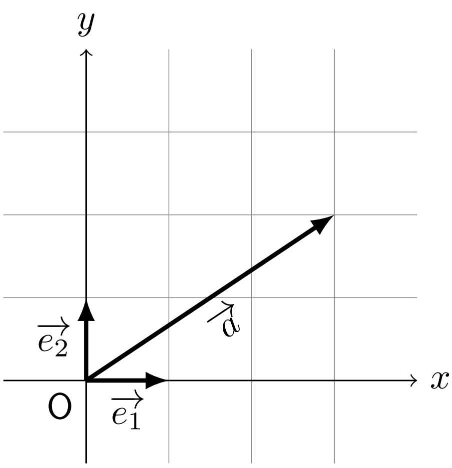
<u>Exemple 1.2</u> Les vecteurs suivants sont-ils unitaires ?

- $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$?
- $\overrightarrow{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$?

Pour trouver **le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de même sens et de même direction** qu'un vecteur donné $\overrightarrow{a}$, il suffit de diviser les composantes de $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ par la norme du vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{u} = \frac{1}{||\overrightarrow{a}||}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}$$

<u>Exemple 1.3</u> Trouver le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de même sens et de même direction que le vecteur $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?



Propriétés 1.2

- $||\overrightarrow{AB}|| \geq 0$
- $||\overrightarrow{AB}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
- $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{BA}||$
- $\|k \cdot \overrightarrow{AB}\| = |k| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$

Exemple 1.2 Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{a} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Produit scalaire

Propriété 1.2 Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 = 0}$$

Définition 2.1 On appelle l'expression $a_1b_1 + a_2b_2$ le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et on la note :

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Exemple 2.1 : Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Définition 1.4 Il existe aussi une formulation trigonométrique du produit scalaire :

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cdot \cos(\angle(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}))}$$

Exemple 1.2 Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.1 Soit $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Indiquer si les calculs suivants sont possibles et, le cas échéant, si la réponse sera un nombre ou un vecteur. Effectuer les calculs lorsque c'est possible.

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$:
2. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$:
3. $3\overrightarrow{a}$:
4. $\frac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}}$:
5. $\frac{\overrightarrow{a}}{2}$:
6. $||\overrightarrow{a}||$:
7. $3||\overrightarrow{a}||^2$:
8. $||\overrightarrow{a}|| + \overrightarrow{a}$: